GRADE 11 ADVANCED

12 GENERAL

Math Department

Functions from a calculus perspective

Chapter 1

Mr/ Mohamed Taha

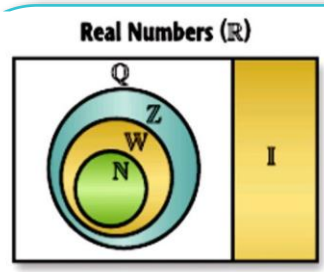
0566151988

2022-2023

Outcomes نواتج التعلم Functions الدوال 1-1

1- Describe subsets or real numbers. وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية.

2- Identify and evaluate functions and state their domains._ التعرف علي الدوال وإيجاد قيمتها وتحديد مجالاتها.



الحرف /Letter	المجموعة / Set	Examples
Q	الأعداد النسبية / Rationals	$0.125, \frac{-7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
I	الأعداد غير النسبية /Irrationals	$\sqrt{3} = 1.73205$
Z	الأعداد الصحيحة / Integers	-5,17,-23,8
W	الأعداد الكلِّية / Wholes	0,1,3,4
N	أعداد طبيعية / naturals	1,2,3,4...

Key Concept

Real Numbers / الأعداد الحقيقية

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 16, x \in z\}$$

The set of numbers x such that......

مجموعات الأعداد X حيث..

X has the given properties...

تتمتع x بالخصائص للمعطاة..

And x is an element of the given set of numbers.

و x عنصر من مجموعة الأعداد

Use Set Builder Notation / استخدام رمز بناء المجموعة

✍ **Describe the set of numbers using set-builder notation.**

صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعة.

$\{8, 9, 10, 11, \ldots\ldots\}$

....

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

....

$x < 7$

....

$x \leq -3$

....

All multiple of three. جميع مضاعفات العدد ثلاثة.

....

All multiple of π. جميع مضاعفات π

....

Bounded intervals/ فترات محدودة		Unbounded intervals/ فترات غير محدودة	
Inequality المتباينة	Interval Notation رمز الفترة	Inequality المتباينة	Interval Notation رمز الفترة
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	$x \geq a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \leq a$	$(-\infty, a)$
$a \leq x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \leq b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

1- Write each set of numbers using interval notation اكتب كل مجموعة أعداد باستخدام رمز الفترة.

a. $-8 < x \leq 16.$

....

b. $x < 11.$

....

c. $x \leq -16$ or $x > 5.$

....

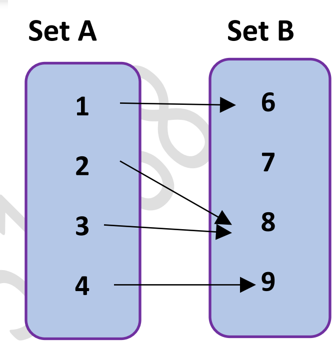
Guided practice تمرين موجه

2A. $-4 \leq y < -1$ 2B. $a \geq -3$ 2C. $x > 9$ or $x < -2$

....

A function is a special type of relation. **الدالة هي نوع خاص من العلاقات.**

Key Concept **Function** الدالة



Words **الشرح**

a function *f* from set *A* to set *B* is a relation that assigns to each element X in set *A* exactly one element *y* in set *B*.

الدالة *f* من المجموعة *A* إلي المجموعة *B* هي علاقة تربط كل عنصر *X* في المجموعة مع عنصر واحد فقط *y* في المجموعة *B*.

Symbols **الرموز**

The relation from set *A* to set *B* is a function.

Set *A* is the domain D= {1,2,3,4}

Set *B* contains the range. R = {6,8,9}

العلاقة من المجموعة *A* إلي المجموعة *B* هي دالة.

المجموعة A هي المجال D = {1,2,3,4}

المجموعة B تحتوي علي المدي. R= {6,8,9}

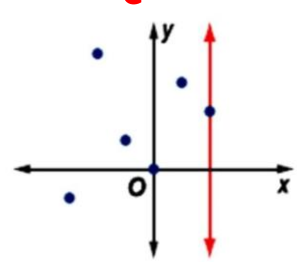
Key concept **Vertical Line Test** اختبار الخط المستقيم الرأسي

Words/ الشرح

A set of points in the coordinate plane is the graph of a function if each possible vertical line intersects the graph in at most one point.

تكون مجموعة النقاط في المستوي الإحداثي هي التمثيل البياني لدالة إذا تقاطع كل مستقيم رأسي محتمل مع التمثيل البياني في نقطة واحدة علي الأكثر

Model/ نموذج



Determine whether each relation represents y as a function of x.

حدد ما إذا كانت علاقة تمثل *y* كدالة من *x* .

The input value is a student's ID number, and the output value y is that student's score on a physics exam.

تمثل قيمة المدخل *x* رقم بطاقة تعريف أحد الطلاب ، وتمثل قيمة المخرج *y* درجة الطالب في اختبار الفيزياء.

....

The input value x is the area code, and the output value y is a phone number in that area code.

تمثل قيمة المدخل *x* رمز المنطقة ، بينما تمثل قيمة المخرج *y* رقم هاتف في هذه المنطقة.

....

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

....
....
....
....
....

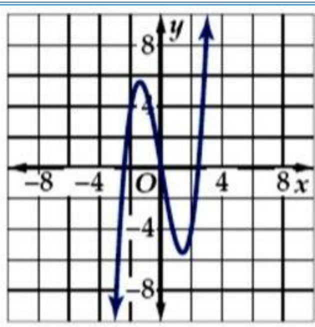
x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

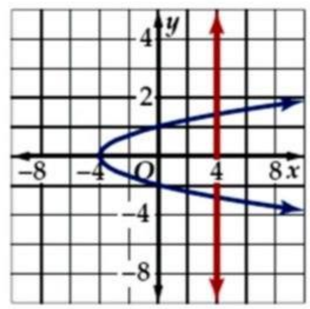
....
....
....
....
....

$3y + 6x = 18$

$y^2 - 2x = 5$

....





....

If $g(x) = x^2 + 8x - 24$, find each function value. جد قيمة كل دالة.

a. *g(6)*

....

....

b. *g(-4x)*

....

....

c. *g(5c+4)*

....

Guided practice تمرين موجه

If $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$, *find each function value.*

4A. $f(12)$

....

....

4B. $f(6x)$

....

....

Find domains Algebraically إيجاد المجال جبرياً

State the domain of each function. حدد المجال لكل دالة.

$f(x) = 3x^2 + 5x - 11.$

....

....

$$f(x) = \frac{2 + x}{x^2 - 7x}$$

....

....

$$f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$$

....

....

$h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

....

....

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

....

....

$$g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$$

....

....

Evaluate a Piecewise-Defined Function إيجاد قيمة دالة متعددة التعريف

HEIGHT The average maximum height of children in inches as a function of their parents' maximum height in inches can be modeled by the following piecewise function. Find the average maximum height of children whose parents have the given maximum heights. Use $h(x)$, where is the independent variable representing the parents' height and $h(x)$ is the dependent variable representing the child's height.

الارتفاع يمكن التعبير عن متوسط أقصي طول للأطفال بالسنتيمتر كدالة من أقصي طول آبائهم بالسنتيمتر في صورة الدالة المتعددة التعريف التالية. جد متوسط أقصي طول للأطفال المعطي فيما يلي طول أبائهم. استخدم h(x) هي المتغير المستقل الذي يمثل طول الآباء كما أن h(x) هي المتغير التابع الذي يمثل طول الطفل.

$$h(x)=\begin{cases}1.6x-41.6 \ \ if\ 63<x<66\\ 3x-132\ \ if\ \ 66\le x\ \le 68\\ 2x-66\ \ if\ \ x\ >68\end{cases}$$

$\boldsymbol{h(67)}$.

....

$\boldsymbol{h(72)}$.

....

$\boldsymbol{h(66)}$.

....

SPEED The speed v of a veical in kilometers per hour can be represented by the following piecewise function when t is the time in seconds. Find the speed of the vehicle at each indicated time.

السرعة يمكن التعبير عن سرعة السيارة V بالدالة متعددة التعريف التالية حيث t تمثل الزمن بالثانية. جـد سرعة السيارة في كل من الأوقات التالية.

$$v(t)=\begin{cases}4t\ \ if\ \ 0\le t\le 15\\ 60\ if\ 15<t\ <240\\ -6t+1500\ \ if\ 240\ \le 250\end{cases}$$

A. $\boldsymbol{v(5)}$ **B.** $\boldsymbol{v(15)}$ **C.** $\boldsymbol{v(245)}$

....

....

....

Outcomes نواتج التعلم Analyzing Graphs of Functions and Relations 1-2

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1- Use graphs of functions to estimate function value and find domains, ranges, y-intercepts, and zeros of functions.

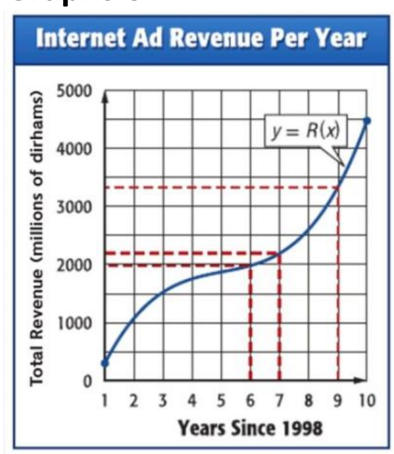
1- استخدم التمثيلات البيانية للدوال في تقدير قيم الدوال.

2- Explore symmetries of graphs and identify even and odd functions.

2- تحديد الدوال الفردية والزوجية.

Estimate Function Values تقدير قيم الدوال

Internet Consider the graph of function R shown. With more people turning to the internet for news and entertainment, Internet advertising is big business. The total revenue R in millions of dollars earned by U.S. companies from internet advertising from 1999 to 2008 can be approximated by $R(t) = 17.7t^3 - 2689t^2 + 1458t - 910, 1 \leq t \leq 10$, where t represents the number of years since 1998. Graphs of function like this can help you visualize relationships between real-world quantities.



الإنترنت ادرس التمثيل البياني للدالة R الموضحة. مع لجوء المزيد من الأفراد إلي الإنترنت لمعرفة الأخبار والترفيه عن أنفسهم، أصبحت الدعاية عبر الإنترنت عملاً تجارياً ضخماً. يمكن حساب إجمال العوائد R بملايين الدراهم التي حققتها إحدي الشركات العالمية في مجال الدعاية عبر الإنترنت خلال الفترة من 1999 إلي 2008 من العلاقة $R(t) = 17.7t^3 - 2689t^2 + 1458t - 910, 1 \leq t \leq 10$ حيث t تمثل عدد الأعوام منذ 1998. قد تساعدك التمثيلات البيانية لدوال كهذه في تصور العلاقات بين الكميات في الحياة اليومية.

a. Use the graph to estimate total Internet advertising revenue in 2007. Confirm the estimate algebraically..

أ- استخدم التمثيل البياني في تقدير إجمالي عوائد الدعاية عبر الإنترنت في 2007. تأكد من التقدير جبرياً.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

b. Use the graph to estimate the year in which total Internet advertising revenue reached AED 2 billion. Confirm the estimate algebraically.

ب- استخدم التمثيل البياني في تقدير العام الذي بلغ فيه إجمالي عوائد الإعلان عبر الإنترنت 2 مليار AED . تأكد من التقدير جبرياً.

……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

STOCKS An investor assessed the average daily value of a share of a certain stock over a 20-day period. The value of the stock can be approximated by $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$, where d represents the day of the assessment.

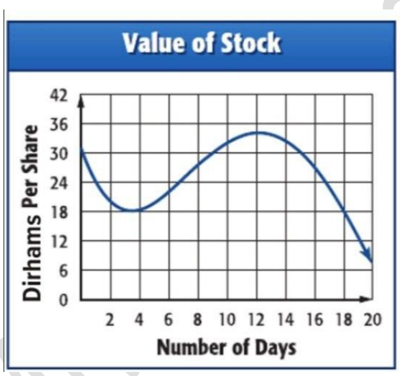
الأسهم قام أحد المستثمرين بإيجاد قيمة متوسط القيمة اليومية لمجموعة سهم معين علي مدار 20 يوماً. يمكن إيجاد قيمة تقريبي لقيمة السهم من خلال العلاقة $v(d)=0.002d^4-0.11d^3+1.77d^2-8.6d+31, 0 \le d \le 20$ حيث d تمثل يوم التقييم.

A. use the graph to estimate the value of the stock in the 10th day. Confirm your estimate algebraically.

أ- استخدم التمثيل البياني في تقدير قيمة السهم في اليوم العاشر ، تأكد من التقدير جبرياً.

B. Use the graph to estimate the days during which the stock was valued at AED 30 per share. Confirm your estimate algebraically.

ب- استخدم التمثيل البياني في تقدير الأيام التي بلغت قيمة السهم فيها AED 30 للسهم. تأكد من التقدير جبرياً.



……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

……………………………………………………………….

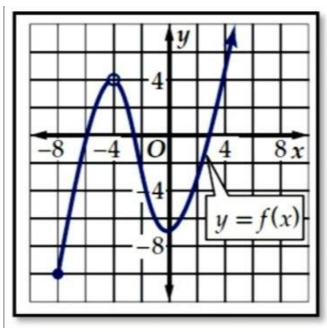
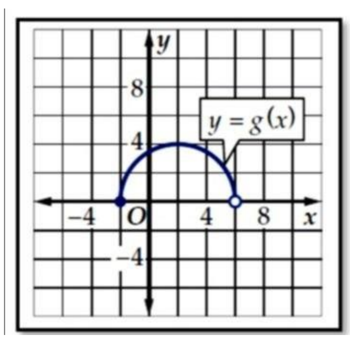
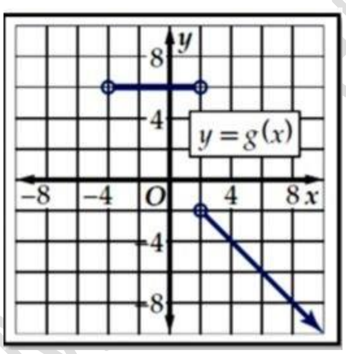
……………………………………………………………….

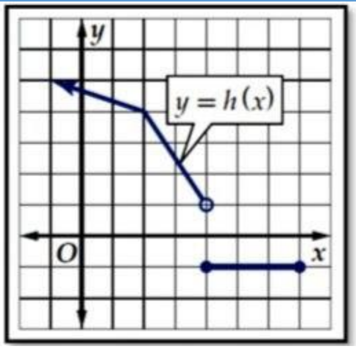
……………………………………………………………….

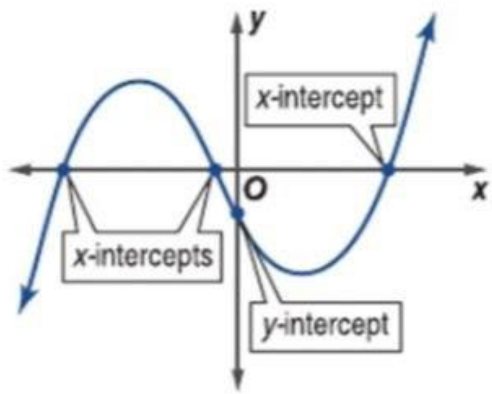
Find Domain and Range

Use the graph of f to find the domain and range of the function.

استخدم التمثيل البياني لـ f لمعرفة مجال الدالة ومداها.

The graph	Domain/ المجال	Range/ المدى
		
		
		

	....	....



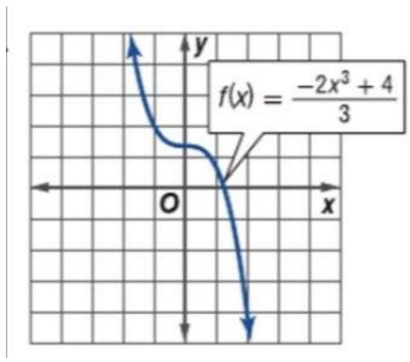
A point where a graph intersects or meets the $x -$ or $y -$axis is called an intercept. An $x -$intercept of a graph occurs where $y =$0.A $y -$intercept of a graph occurs where $x = 0$. The graph of a function can have 0,1, or more x-intercepts, but at most one y-intercept.

يطلق على النقطة التي يتقاطع فيها التمثيل البياني أو يتقابل فيها مع المحور الأفقي X أو المحور الرأسي y نقطة التقاطع. يحث التقاطع مع المحور الأفقي x عندما تكون y =0 . يحدث التقاطع مع المحور الرأسي y عندما تكون x=0. قد يتقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور الأفقي x أو يتقاطع مرو واحدة فقط أو أكثر من مرة ولكن يتقاطع مرة واحدة فقط علي الأكثر مع المحور y.

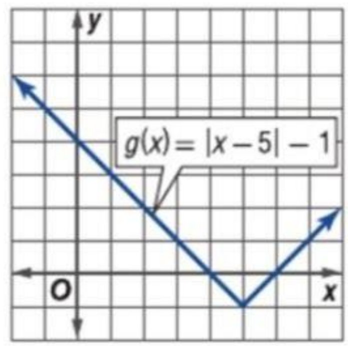
Use the graph of each function to approximate its y-intercept. Then find the y – intercept algebraically.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتحديد القيم التقريبية للتقاطع مع المحور y ثم جد التقاطع مع المحور الرأسي y جبرياً.

a.



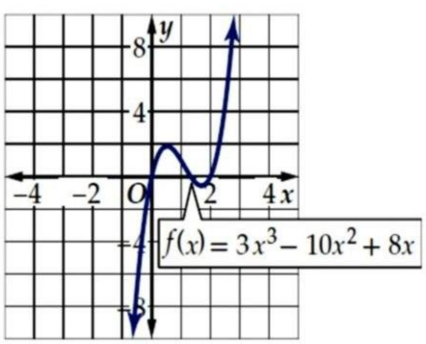
b.



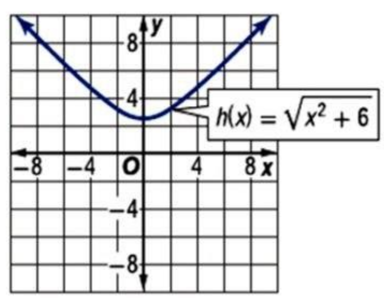
....
....
....

Guided practice تمرين موجه

3A.

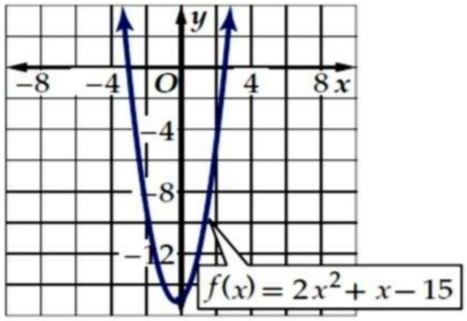


3B.

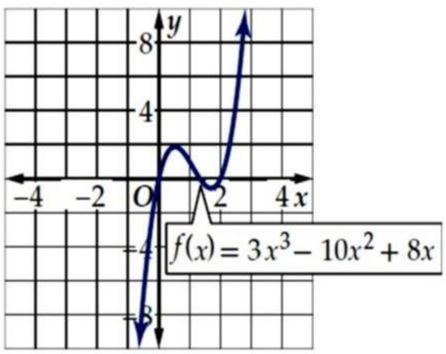


Use the graph of each function to approximate its zero (s). Then find its zero(s) algebraically.

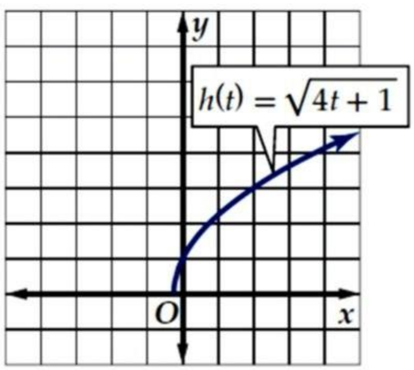
استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x)=2x^2+x-15$ ، لتحديد أصفارها تحديداً تقريبياً ثم جد أصفارها جبرياً.



....
....
....
....
....
....
....



....
....
....
....
....
....
....



....
....
....
....
....
....
....

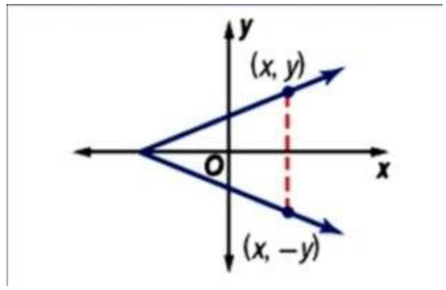
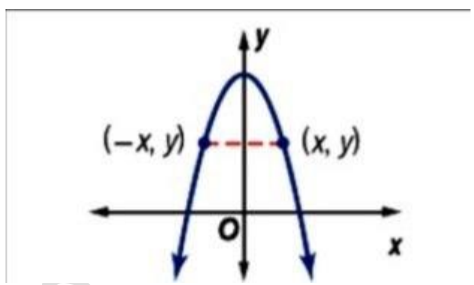
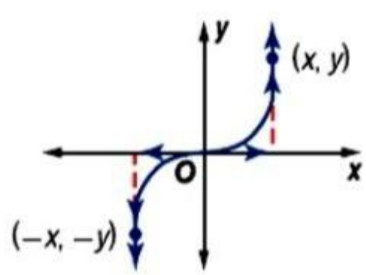
2 Symmetry of Graphs

Graphs of relations can have two different types of symmetry.
Graphs with line symmetry can be folded along a line so that the two halves match exactly. Graphs that have point symmetry can be rotated 180° with respect to a point and appear unchanged. The three most common types of symmetry are shown below.

2 تناظر التمثيلات البيانية

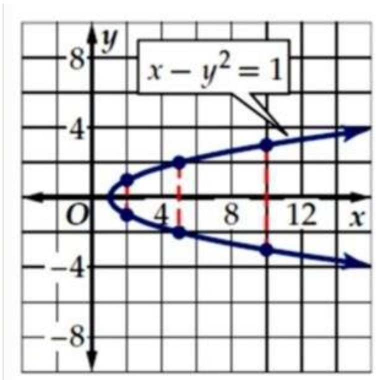
تتخذ التمثيلات البيانية لعلاقات نوعين مختلفين من التناظر . التمثيلات البيانية التي تتخذ التناظر المحوري يمكن طيها حول مستقيم بحيث يتطابق النصفان تماماً. التمثيلات البيانية التي تتخذ التناظر النقطي يمكن تدويرها بمقدار 180° حول نقطة معينه وتظهر دون تغيير. موضح أدناه أشهر ثلاثة أنواع من التناظر.

Key Concept Test for symmetry اختبارات التناظر

Graphic Test/ اختبار التمثيل البياني	Model/ استخدام النماذج	Algebraic Test/ الإختبار الجبري
The graph of a relation is symmetric with respect to the x-axis if and only if for every point (x,y) on the graph, the point (x,-y) is also on the graph. يُعد التمثيل البياني لأي علاقة متناظرة حول المحور الأفقي x فقط إذا كان لكل نقطة (x,y) على التمثيل البياني توجد النقطة (x,-y) أيضاً على التمثيل البياني.		Replacing y with -y produced an equivalent equation. حذف y ووضع -y محلها ينتج معادلة مكافئة.
The graph of a relation is symmetric with respect to the y-axis if and only if for every point (x,y) on the graph, the point (-x,y) is also on the graph. يُعد التمثيل البياني لأي علاقة متناظراً حول المحور الرأسي y فقط إذا كان لكل نقطة (x,y) على التمثيل البياني توجد النقطة (-x,y) أيضاً على التمثيل البياني.		Replacing x with -x produces an equivalent equation. حذف x ووضع -x محلها ينتج معدالة مكافئة.
The graph of a relation is symmetric with respect to the origin if and only if for every point (x,y) on the graph, the point (-x,-y) is also on the graph. يُعد التمثيل البياني لأي علاقة متناظراً حول نقطة الأصل فقط إذا كان لكل نقطة (x,y) على التمثيل البياني توجد النقطة (-x,-y) أيضاً على التمثيل البياني.		Replacing x with -x and y with -y produces an equivalent equation. حذف x ووضع -x محلها وحذف y أيضاً ووضع -y محلها ينتج معادلة مكافئة.

Use the graph of each equation to test for symmetry with respect to the x-axis, y-axis, and the origin. Support the answer numerically. Then confirm algebraically.

استخدم التمثيل البياني لكل معادلة في اختبار التناظر حول المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y أو نقطة الأصل. دعّم إجابتك عددياً ثم أكدها جبرياً.



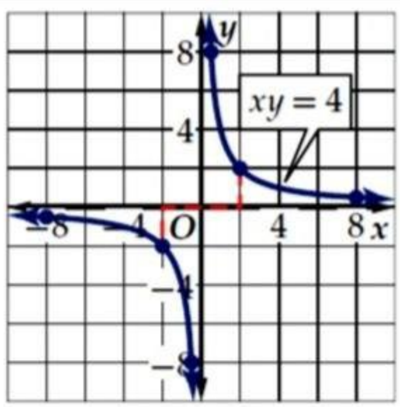
....

....

....

....

....



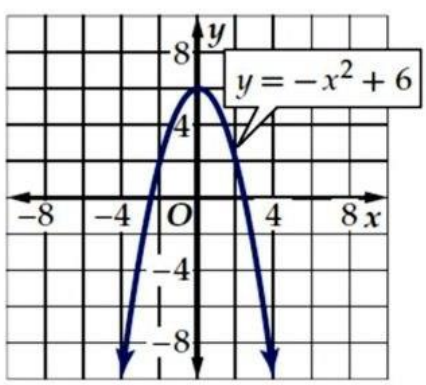
....

....

....

....

....



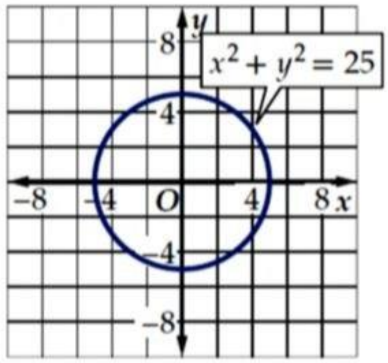
....

....

....

....

....



……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Key concept **Even and Odd Functions** الدوال الفردية والدوال الزوجية

Type of Function/ نوع الدالة		Algebraic Test/ الاختبار الجبري	
Function that are symmetric with respect to the y-axis are called even functions.	يُطلق علي الدوال المتناظرة حول المحور الرأسي y دوال زوجية.	For every x in the domain of f, $f(-x) = f(x)$	لكل x في مجال الدلة f $f(-x) = f(x)$
Functions that are symmetric with respect to the origin are called odd fucntions.	يُطلق علي الدوال المتناظرة حول نقطة الأصل دوال فردية.	For every x in the domain of f, $f(-x) = -f(x)$	لكل x في مجال الدلة f $f(-x) = -f(x)$

Determine whether each function is even, odd or neither. حدد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو ليست أياً منهما.

$f(x) = x^3 - 2x$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

$g(x) = x^4 + 2$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

$f(x) = x^2 + 6x + 10$

....

....

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

....

....

$g(x) = 4\sqrt{x}$

....

....

Out comes نواتج التعلم Continuity, End Behavior, and Limits 1-3
الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

1- Use limits to determine the continuity of a function and apply the intermediate value theorem to continuous functions.

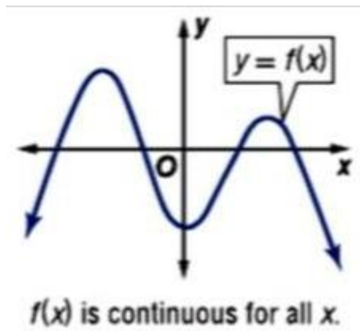
1- استخدام النهايات لتحديد اتصال الدالة وتطبيق نظرية القيمة الوسطية للدالة المتصلة.

2- Use limits to describe end behavior of functions.

2- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

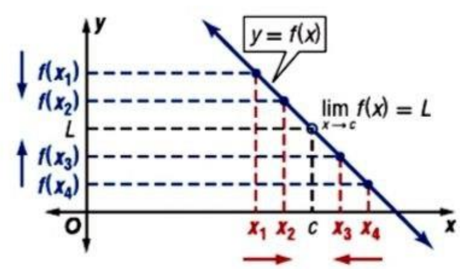
1 Continuity The graph of a continuous function has no breaks, holes, or gaps. You can trace the graph of a continuous function without lifting your pencil. One condition for a function $f(x)$ To be continuous at $x = c$ is that the function must approach c from the left and right sides. The concept of approaching a value without necessarily ever reaching it is called a limit.

1 الاتصال التمثيل البياني لدالة متصلة لا يحتوي علي فواصل أو فجوات او فراغات. ويمكن تتبع التمثيل البياني لدالة متصلة دون رفع القلم الرصاص عن الورقة. أحد شروط اتصال الدالة $f(x)$ عند x=c هو أن الدالة يجب أن تقترب من إحدي قيمها الفردية عند اقتراب قيم x من c من الجانبين الأيسر والأيمن. ومفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة يُسمي نهاية.



f(x) is continuous for all x.

Key Concept Limits النهايات



Words الشرح

If the value of $f(x)$ approaches a unique value L as X approaches C from each side, then the limit of $f(x)$ as x approaches c is L.

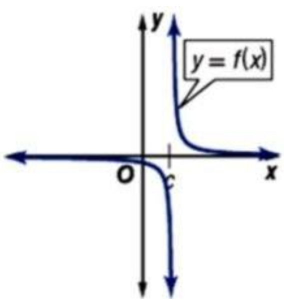
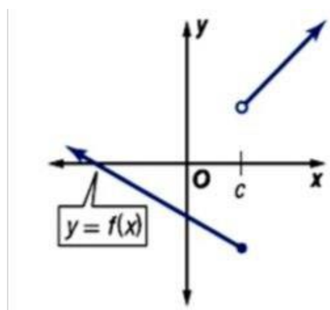
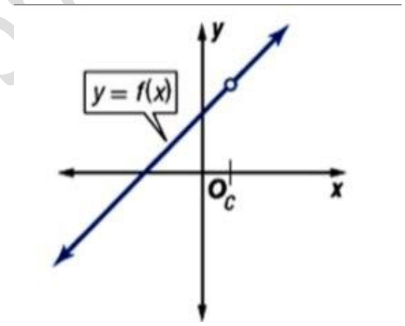
إذا كانت قيمة f(x) تقترب من قيمة وحيدة L عندما تقتربx من c من كل جانب. فإن نهاية f(x)عندما تقترب X من c هي L .

Symbols الرموز

$\lim_{x \to c} f(x) = l$, which is read the limit of f(x) as x approaches c is L.

$\lim_{x \to c} f(x) = l$ والتي تعني نهاية f(x) مع اقتراب x من القيمة c هي L.

Key Concept Types of Discontinuity / أنواع الانفصال

A function has an **infinite discontinuity** at x=c if the function value increases or decreases indefinitely as x approaches c from the left and right. يكون لدالة انفصال لا نهائي عند x=c إذا زادات قيمة الدالة أو تناقصت بشكلٍ لا نهائي مع اقتراب x من c من اليسار واليمين.	A function has a **jump discontinuity** at x=c if the limits of the function as x approaches c from the left and right exist but have two distinct values. يكون لدالة انفصال قفزي عند x=c في حالة وجود نهايتين للدالة بينما تقترب x من c من اليسار واليمين ولكن بقيمتين مختلفتين.	A function has **a removable discontinuity** if the function is continuous everywhere except for a hole at x=c. يكون للدالة انفصال قابل للإزالة عندما تكون الدالة متصلة في كل مكان باستثناء فجوة عند x=c.
Example/ مثال 	Example/ مثال 	Example/ مثال 

Concept summary continuity Test / اختبار الاتصال

A function $f(x)$ is continuous at x=c if it satisfies the following conditions.

- $f(x)$ is defined at c. that is, $f(c)$ exists.
- $f(x)$ approaches the same value from either side of c. That is $\lim_{x\to c} f(x)\ exists.$
- The value that $f(x)$ approaches from each side of c. That is $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

وتكون الدالة f(x) متصلة عند x=c إذا كانت تحقق الشروط التالية

- F(x) معرفة عند c بمعني f(c) موجودة.
- F(x) تقترب من القيمة ذاتها من جانبي c بمعني $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- القيمة التي تقترب f(x) منها من جانبي c هي f(c) بمعني $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

حدد ما إذا كانت الدالة متصلة أو لا عند x=0 . برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

Determine whether each function is continuous at x=0. Justify using the continuity test.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

x							
$f(x)$							

....

....

....

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم xالمذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتاصل. وإذا كانت منفصلة ، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي او قفزي أو قابل للإزالة.

Determine whether each function is continues at he given x-value(s). Justify using the continuity test. If discontinuous, identify the type of discontinuity as *infinite, jump, or removable.*

a. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & if \;\; x > -3 \\ 2 - x & if \;\; x \leq -3 \end{cases}; at\ x = -3$

x							
$f(x)$							

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-9};\ at\ x = 3$$

x							
$f(x)$							

....

....

....

....

Determine whether $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ is continuous at $x = 2$. Justify using the continuity test.
Check the three conditions in the continuity test.

حدد ما إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة أم لا عند x=2 . برر إجابتك باستخدام اختابر الاتصال.
تحقق من الشروط الثلاثة في اختبار الاتصال.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$							

....

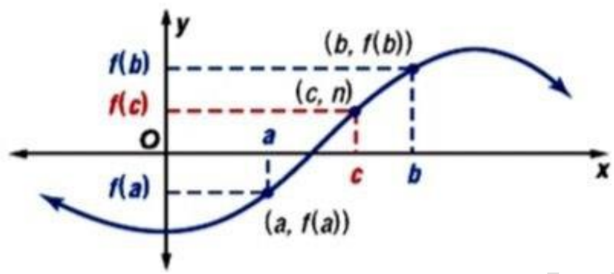
....

....

....

Key Concept intermediate Value Theorem / نظرية القيمة الوسطية

If $f(x)$ is a continuous function and $a < b$ and three is a value n such that n is between f(a) and f(b), then there is a number c, such that $a < c < b$ and f(c)=n.



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و $a < b$ وهناك قيمة n بحيث تكون n بين f(a) و f(b). فهناك العدد c . بحيث $a < c < b$ و f(c)=n.

Corollary: The Location Principle if f(x) is a continuous function and f(a) and f(b) have opposite signs, then three exists at least one value c, such that $a < c < b$ and f(c)=0. That is, three is a zero between a and b.

النتيجة: مبدأ تحديد الموقع إذا كانت f(x) دالة متصلة وكانت f(a) و f(b) متعاكستان بالإشارة فهناك على الأقل قيمة واحدة c. بحيث $a < c < b$ و f(c)=0 بمعنى يوجد صفر بين a و b.

Determine between which consecutive integers the real zeros of each function are located on the given interval.

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

a. $f(x) = x^3 - 4x + 2$; $[-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

....

....

....

2 End Behavior The **end behavior** of a function describes how a function behaves at either end of the graph. Thai is, end behavior is what happens to the value of $f(x)$ as x increases or decreases without bound-becoming greater and greater or more and more negative. To describe the end behavior of a graph you can use the concept of a limit.

2 السلوك الطرفي يصف السلوك الطرفي لدالة كيفية سلوك الدالة علي جانبي التمثيل البياني، بمعني ، السلوك الطرفي هو ما يحدث لقيمة $f(x)$ بينما تتزايد x أو تتناقص بلا نهاية بحيث تصبح أكبر وأكبر وسالبة بدرجة أكبر، ولوصف السلوك الطرفي لتمثيل بياني، يمكنك استخدام مفهوم النهاية.

Left-End Behavior/ السلوك الطرفي الأيسر

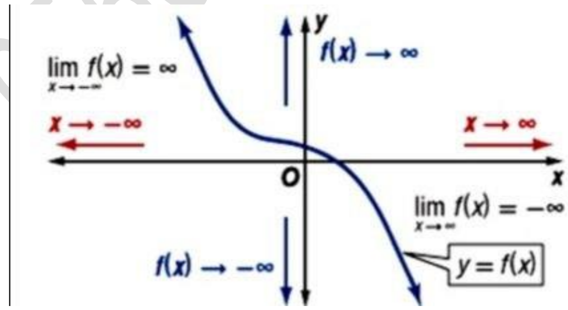
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Right-End Behavior السلوك الطرفي الأيمن /

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

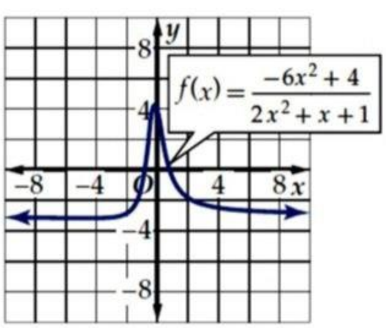
One possibility for the end behavior of the graph of a function is for the value of $f(x)$ to increase or decrease without bound.
This end behaviors is described by saying that $f(x)$ approaches positive or negative infinity.

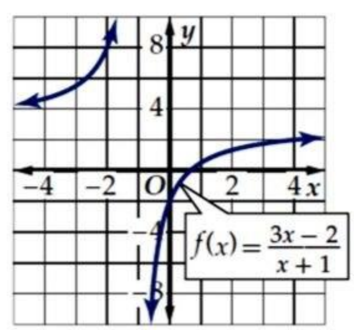
أحد إمكانات السلوك الطرفي للتمثيل البياني لدالة هو ان تزداد قيمة $f(x)$ أو تنقص دون قيد. ويتم وصف هذا السلوك النهائي عن طريق القول بان $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو سالب ما لانهاية.



Use the graph of each function to describe its end behavior. Support the conjecture numerically.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي وادعم الفرضية بالأرقام.

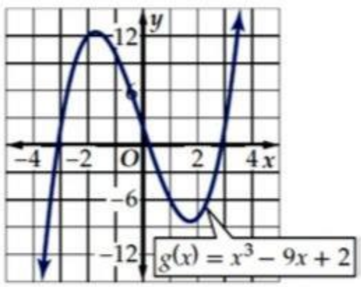


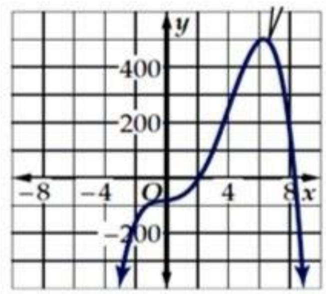


....
....
....

Use the graph of each function to describe its end behavior. Support the conjecture numerically.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام





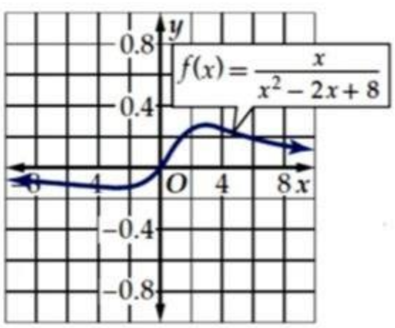
....

....

....

Use the graph of $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+8}$ to describe its end behavior. Support the conjecture numerically.

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+8}$ لوصف سلوكها الطرفي. ادعم الفرضية بالأرقام.



....

....

....

....

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$							

....

....

Out comes نواتج التعلم Extrema and Average Rates of Change 1-4
القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1- Determine intervals on which functions are increasing, constant, or decreasing, and determine maxima and minima of function.
2- Determine the average rate of change of a function.

1- تحديد الفترات التي تكون عندها الدوال متزايدة أو ثابتة أو متناقصة.

2- إيجاد متوسط معدل التغيير لدالة ما.

1 Increasing and Decreasing Behavior An analysis of a function can also include a description of the intervals on which the function is increasing, decreasing, or constant.
Consider the graph of $f(x)$ shown.
As you move from left to right, $f(x)$ is

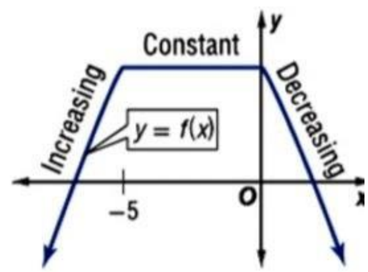
- Increasing or rising on $(-\infty, -5)$,
- Constant or flat on (-5,0), and
- Decreasing or falling on $(0, \infty)$.

These graphical interpretations can also be described algebraically.

1 سلوك التزايد والتناقص يمكن أن يتضمن تحليل الدالة أيضاً وصفاً للفترات التي تتزايد عندها الدالة او تتناقص أو تبقي ثابتة.
فكر في التمثيل البياني الموضح لـ $f(x)$ بينما تتحرك من اليسار لليمين .
تكون $f(x)$

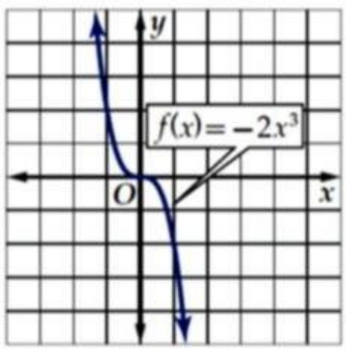
- متزايدة أو متصاعدة عند $(-\infty, -5)$
- ثابتة أو مسطحة عند (-5,0)
- متناقصة أو هابطة عند $(0, \infty)$.

ويمكن التعبير عن تلك التفسيرات البيانية أيضاً بصورة جبرية.



Use the graph of each function to estimate intervals to the nearest 0.5 unit on which the function is increasing, decreasing, or constant. Support the answer numerically.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربة إلي أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ادعم إجابتك عددياً.



a. $f(x) = -2x^3$ Analyze Graphically التحليل بيانياً

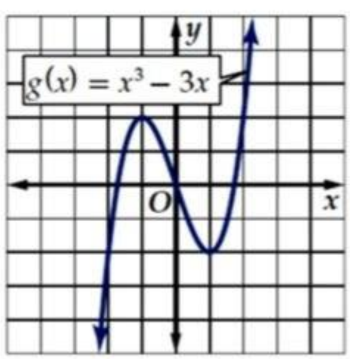
....

Support Numerically التحليل عددياً

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$									

....

....



a. $g(x) = x^3 - 3x$ Analyze Graphically التحليل بيانياً

....

Support Numerically التحليل عددياً

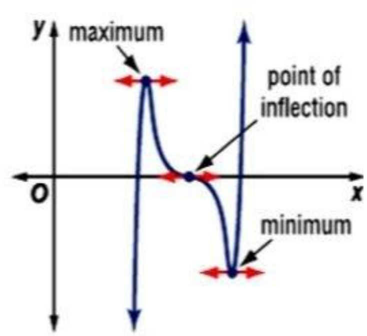
x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$f(x)$						

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$					

x	1	3	5	7	9	11
$f(x)$						

……
……
………

Critical points of a function are those points at which a line drawn tangent to the curve is horizontal or vertical. Extreme are critical points at which a function changes its increasing or decreasing behavior. At these points, the function has a maximum or a minimum value, either relative or absolute. A point inflection can also be a critical point. At these points, The graph changes its shape, but not its increasing or decreasing behavior. Instead, the curve changes from being bent upward to being bent downward, or vice versa



النقاط الحرجة لدالة ما هي تلك النقاط التي يكون عندها الخط المماس للمنحني أفقي أو رأسي، القيم القصوي هي نقاط حرجة تغير الدالة عندها سلوكها من حيث التزايد أو التناقص، وعند هذه النقاط. تكون للدالة قيمة عظمى أو صغري، محلية او مطلقة، نقطة الانعطاف يمكن أن تكون أيضاً نقطة حرجة. وعند هذه النقاط ، تغير الدالة من إتجاه تقعرها ، ولكن لا تغير سلوكها من حيث التزايد أو التناقص ، بدلاً عن ذلك ، يتغير اتجاه لمنحني من أعلي لأسفل أو العكس.

Key Concept Relative and Absolute Extrema القيم العظمي المحلية والمطلقة

Words
الشرح

A relative maximum of a function f is the greatest value f(x) can attain on some interval of the domain.

القيمة العظمي المحلية لدالة fهي أكبر قيمة يمكن أن تبلغها f(x) في فترة من المجال.

Symbols
الرموز

f(a) is a relative maximum of f if there exists an interval (x_1,x_2) containing a such that $f(a) > f(x)$ for every $x \neq 0$ in (x_1, x_2).

f(a) هي قيمة عظمي محلية للدالة f إذا كانت هناك فترة (x_1,x_2) تحتوي علي a بحيث $f(a) > f(x)$ لكل $x \neq 0$ في (x_1, x_2).

Words
الشرح

If a relative maximum is the greatest value a function f can attain over its entire domain, then it's the absolute maximum.

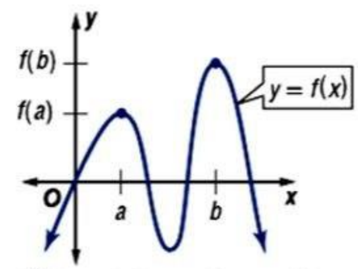
إذا كانت القيمة العظمي المحلية هي أكبر قيمة يمكن ان تبلغها الدالة f في مجالها بالكامل ، فهي قيمة عظمي مطلقة.

Symbols
الرموز

F(b) is the absolute maximum of f if $f(b) > f(x)$ for every $x \neq b$, in the domain of f.

f(b) هي القيمة العظمي المطلقة للدالة f إذا كان $f(b) > f(x)$ لكل $x \neq b$ ، في مجال f

Model



f(*a*) is a relative maximum of *f*.
f(*b*) is the absolute maximum of *f*.

Words
الشرح

A relative minimum of a function f is the least value f(x) can attain on some interval of the domain.

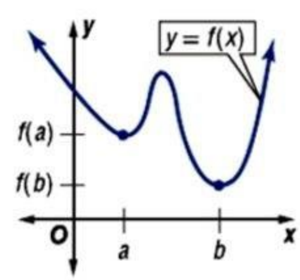
القيمة الصغري المحلية لدالة f هي أصغر قيمة يمكن أن تبلغها f(x) في فترة من المجال.

Symbols
الرموز

F(a) is a relative minimum of f if there exists an interval (x_1 , x_2) containing a such that $f(a) < f(x)$ for every $x \neq a$ in (x_1 , x_2)

f(a) هي قيمة صغري محلية للدالة f إذا كانت هناك فترة (x_1 , x_2) تحتوي علي a بحيث $f(a) < f(x)$ لكل $x \neq a$ في (x_1 , x_2)

Model

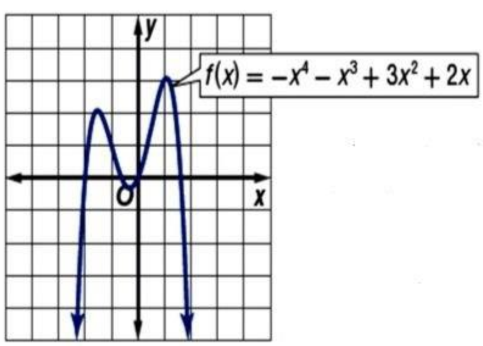


f(*a*) is a relative minimum of *f*.
f(*b*) is the absolute minimum of *f*.

Words **الشرح**	**If a relative minimum is the least value a function f can attain over its entire domain, then it is the absolute minimum.** إذا كانت القيمة الصغري المحلية هي أصغر قيمة يمكن ان تبلغها الدالة f في مجالها بالكامل ، فهي قيمة صغري مطلقة.
Symbols **الرموز**	**f(b) is the absolute minimum of f if $f(b) < f(x)$ for every $x \neq b$, in the domain of f.** f(b) هي القيمة الصغري المطلقة للدالة f إذا كان $f(b) < f(x)$ لكل $x \neq b$ ، في مجال f

Estimate and classify the extra for the graph of each function. Support the answers numerically.

قدر وصنف القيم القصوي للتمثيل البياني لكل دالة ، ادعم اجابتك عددياَ.



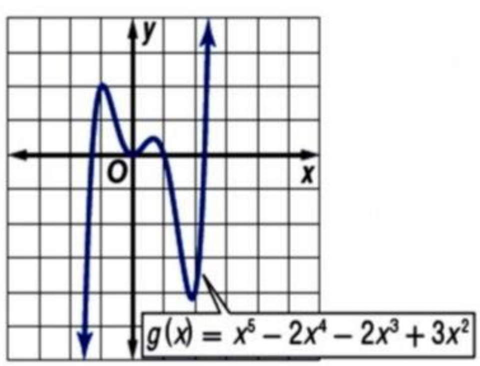
....

....

....

....

....



....

....

....

....

....

Key Concept **Average Rate of Change** متوسط معدل التغيير

Words **الشرح**

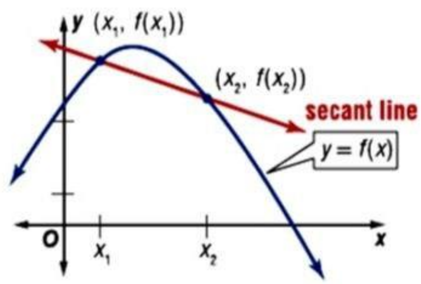
The average rate of change between any two points on the graph of f is the slope of the line through those points.

متوسط معدل التغيير بين أي نقطتين في التمثيل البياني للدالة f هو ميل الخط بالنقطتين

Geometry **الهندسة**

The line through two points on a curve is called a secant line. The slope of the secant line is denoted m_{sec}.

الخط المار بنقطتين علي منحني يُسمي القاطع ، ويُشار إلي ميل القاطع بواسطة m_{sec}



Symbols **الرموز**

The avarge rate of change on the interval $[x_1, x_2]$ is

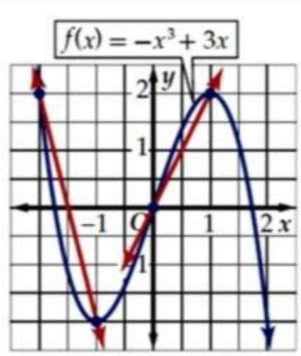
$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

متوسط معدل التغيير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Find the average rate of change of $f(x) = -x^3 + 3x$ on each interval.

جد متوسط معدل التغيير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ في كل فترة.



a. $[-2, -1]$

....

....

....

b. $[0, 1]$

....

....

....

Find the average rate of change of each function on the given interval.

جد متوسط معدل التغير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x, [2, 3]$$

....

....

....

....

Physics If wind resistance is ignored, the distance $d(t)$ in feet an object travels when dropped from a high place is given by $d(t) = 16t^2$, where t is the time is seconds after the object is dropped.
Find and interpret the average speed of the object from 2 to 4 seconds.

فيزياء إذا تم إهمال مقاومة الرياح ، فيتم تمثيل المسافة $d(t)$ بالقدم والتي يقطعها جسم يتحرك بعد إسقاطه من مكان مرتفع باستخدام العلاقة $d(t) = 16t^2$ ، حيث يمثل t الزمن بالثانية بعد إسقاط الجسم، جد وفسر متوسط سرعة الجسم من الثانية 2 إلي 4.

....

....

....

....

Outcomes نواتج التعلم Parent Functions and Transformations 1-5
الدوال الأصلية والتحويلات

1- Identify, graph, and describe parent functions.

2- Identify and graph transformations of parent functions.

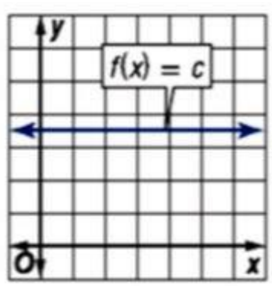
1- تحليل الدوال الأصلية وتمثلها بيانياً ووصفها.

2- تحديد تحويلات الدوال وتمثيلها بيانياً.

Key concept Linear and Polynomial Parent Functions / الدوال الأصلية الخطية وكثيرة الحدود

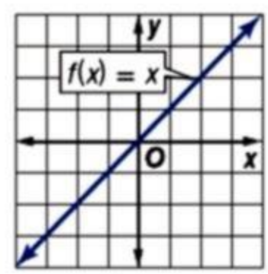
A constant function has the form f(x)=c, where c is any real number. Its graph is a horizontal line. When c=0, f(x) is the zero function.

الدالة الثابتة تكون بالصورة $f(x) = c$ ، حيث c أي عدد حقيقي، وتمثيلها البياني خط أفقي ، وعند $c = 0$ ، فإن $f(x)$ تكون دالة صفرية



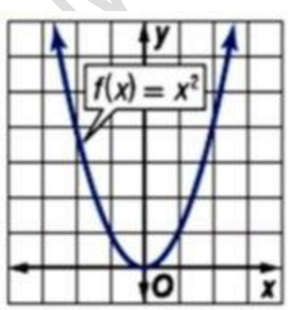
The identity function f(x)=x passes through all points with coordinates (a, a).

الدالة المحايدة $f(x) = x$ تمر بجميع النقاط ذات الإحداثيات (a, a)



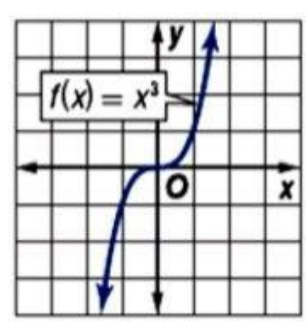
The quadric function $f(x)=x^2$ has a U-shapes graph.

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ تمثيلها البياني علي شكل حرف U.



The cubic function $f(x)= x^2$ is symmetric about the origin.

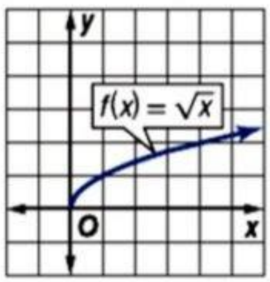
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متناظرة حول نقطة الأصل.



Key Concept square Root and Reciprocal Parent Functions دوال الجذر التربيعي والدوال العكسية الأصلية

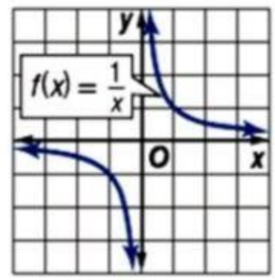
The square root function has the form f(x)= $\sqrt{x}$

دالة الجذرالتربيعي تكون بالصورة f(x)= $\sqrt{x}$.

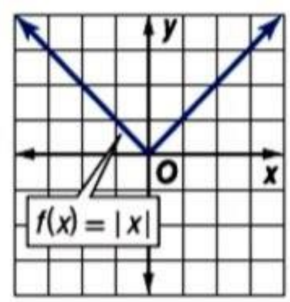


The reciprocal function has the form f(x)=$\frac{1}{x}$.

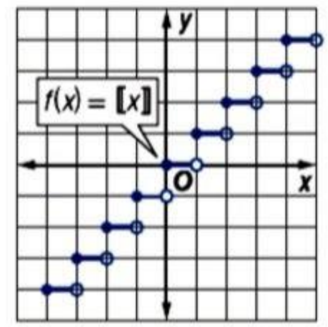
الدالة العكسية تكون بالصورة f(x)=$\frac{1}{x}$.



Key Concept Absolute Value Parent Function / دالة القيم المطلقة الأصلية

Words **الشرح**	The absolute value functions, denoted f(x) = |x|, is a V-shaped function defined as $f(x) = \begin{cases} -x & if\ x < 0 \\ x & if\ x \geq 0 \end{cases}$ دالة القيمة المطلقة ، المشار إليها f(x) = |x| هي دالة علي شكل V ويتم تعريفها بالصورة. $f(x) = \begin{cases} -x & if\ x < 0 \\ x & if\ x \geq 0 \end{cases}$	**Model** 
Examples **أمثلة**	|-5| = 5, |0|=0, |4|=4.	

Key concept Greatest Integer Parent Function / دالة أكبر عدد صحيح الأصلية

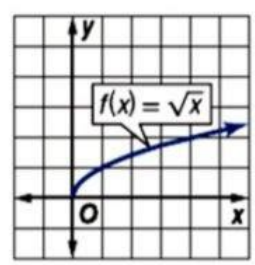
		Model
Words **الشرح**	**The greatest integer function**, denotes f(x)=$[\![x]\!]$, is defined as the greatest integer less than or equal to x. دالة أكبر عدد صحيح المشار إليها f(x)=$[\![x]\!]$ يتم تعريفها بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي X.	
Examples **أمثلة**	$[\![-4]\!]$=-4, $[\![-1.5]\!]$=-2, $\left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$	

Describe the following characteristics of the graph of the parent function $f(x) = \sqrt{x}$; domain, range, intercepts, symmetry, continuity, end behavior, and intervals on which the graph is increasing/decreasing.

صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$: المجال والمدي والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد / تناقص التمثيل البياني.

The graph of the square root function (Figure 1.5.1) has the following characteristics

- The domain of the function is [0,∞), and the range is [0,∞).
- The graph has one intercept at (0, 0).
- The graph has no symmetry. Therefore, $f(x)$ is neither odd nor even.
- The graph is continuous for all values in its domain.
- The graph begins at x=0 and $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- The graph is increasing on the interval (0, ∞).



يتسم التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) بالخصائص التالية

- مجال الدالة هو [0,∞) والمدي هو [0,∞) .
- يحتوي التمثيل البياني علي تقاطع واحد (0, 0) .
- لا يحتوي التمثيل البياني علي تماثل إذا $f(x)$ ليست فردية ولا زوجية.
- التمثيل البياني متصل لجميع القيم في المجال.
- يبدأ التمثيل البياني عند x = 0 و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- التمثيل البياني متزايد في الفترة (0, ∞) .

Key Concept Vertical and Horizontal Translations / الإزاحة الأفقية والرأسية

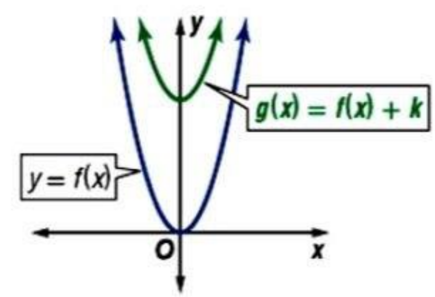
Vertical Translations / الإزاحة الرأسية

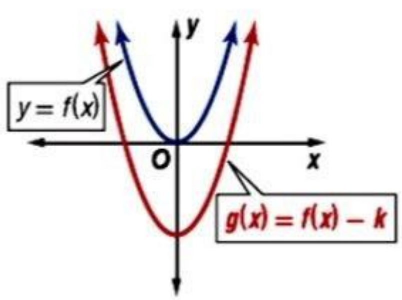
The graph of g(x)= f(x) + k is the graph of f(x) translated

- K units up when $k > 0$, and
- K units down when $k < 0$.

التمثيل البياني لـ g(x)= f(x) + k هو التمثيل البياني لـ f(x) بعد إزاحته

- K وحدة لأعلي عند $k > 0$
- K وحدة لأسفل عند $k < 0$





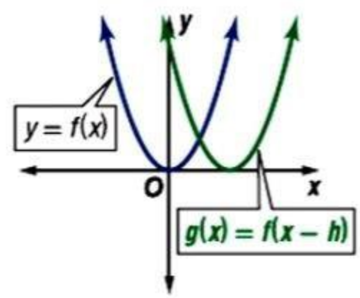
Horizontal Translations / الإزاحة الأفقية

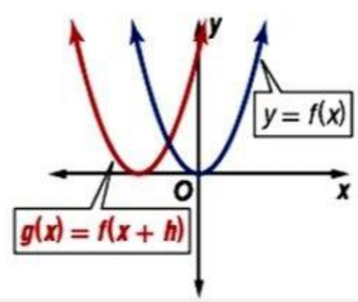
The graph of g(x) = f(x – h) is the graph of f(x) translated.

- h units right when $h > 0$, and
- h units left when $h < 0$.

التمثيل البياني لـ g(x) = f(x – h) هو التمثيل البياني لـ f(x) بعد إزاحته

- h وحدة لأعلي عند $h > 0$
- h وحدة لأسفل عند $h < 0$

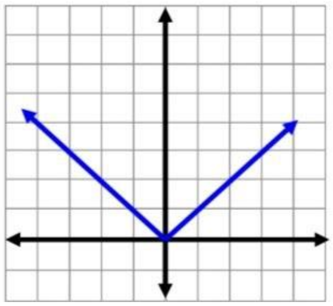




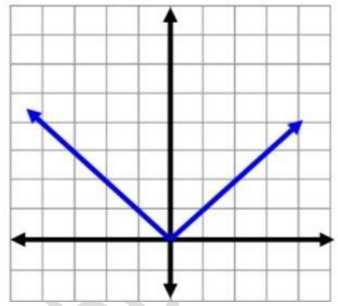
Use the graph of $f(x)$= |x| to graph each function.

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = |x|$ لتمثيل كل دالة بيانياً.

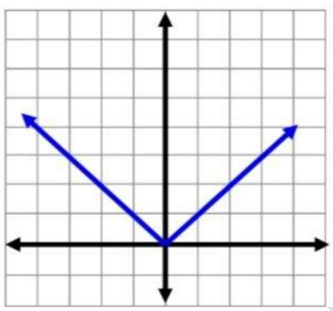
a. $g(x) = |x| + 4$



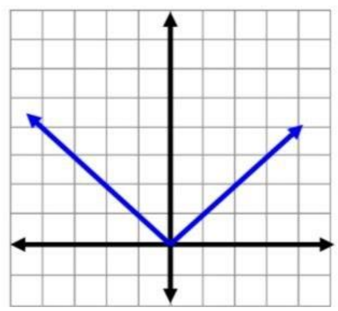
b. $g(x) = |x + 3|$



c. $g(x) = |x - 2| - 1$



d. $g(x) = |x - 2|$



Guided Practice تمرين موجه

Use the graph of $f(x) = x^3$ to graph each function.

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3$ لتمثيل دل دالة بيانياً.

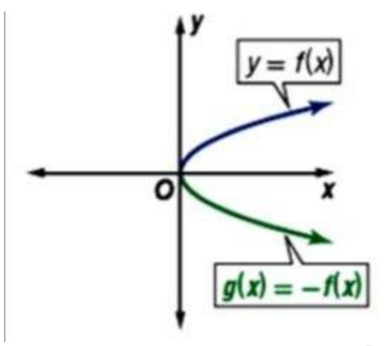
2A. $h(x) = x^3 - 5$ 2B. $h(x) = (x - 3)^3$ 2C. $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

Key Concept Reflections in the Coordinate Axes الانعكاس علي المحاور الإحداثية

Reflection in x-axis /الإنعكاس حول المحور الأفقي x

g(x) = - f(x) is the graph of f(x) reflected in the x-axis.

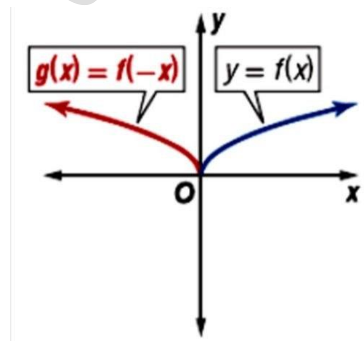
g(x) = - f(x) هو التمثيل البياني لـ f(x) بعد انعكاسه حول المحور الأفقي x.



Reflection in y-axis / الإنعكاس حول المحور الرأسي y

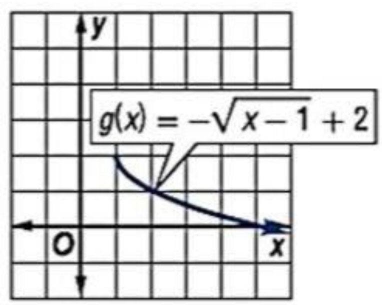
g(x) = f(x) is the graph of f(x) reflected in the y-axis.

g(x) = f(x) هو التمثيل البياني لـ f(x) بعد انعكاسه حول المحور الرأسي y .



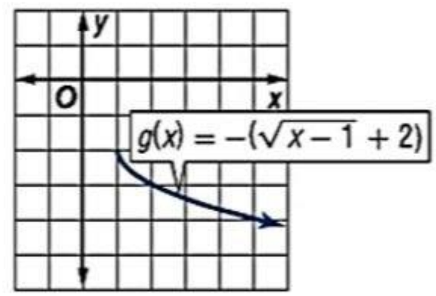
When writing an equation for a transformed function, be careful to indicate the transformations correctly, The graph of $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ is different from the graph of $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$

عند كتابة معادلة لدالة مزاحة ، انتبه إلي الإشارة إلي التحويلات بالشكل الصحيح ، التمثيل البياني لـ $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن التمثيل البياني لـ $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$



Reflection of f(x)=$\sqrt{x}$ in the x-axis then translated 1 unit to the right and 2 units up.

انعكاس f(x)=$\sqrt{x}$ حول المحور الأفقي x ثم الإزاحة بمقدار وحدة لليمين ووحدتين لأعلي.

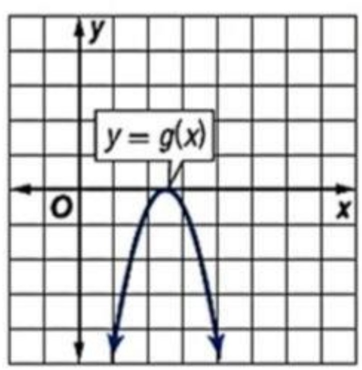


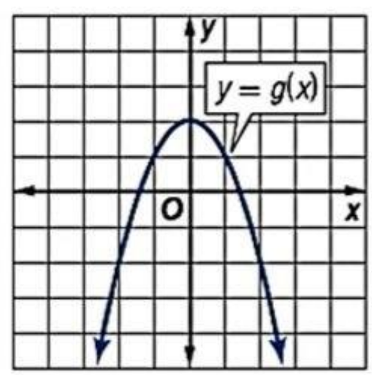
Translation of f(x)=$\sqrt{x}$ 1 unit to the right and 2 units up, then reflected in the x-axis.

إزاحة f(x)=$\sqrt{x}$ بمقدار وحد لليمين ووحدتين لأعلي ثم االانعكاس حول المحور الأفقي x.

Describe how the graphs of $f(x) = x^2$ and $g(x)$ are related. Then write an equation for $g(x)$.

صف وجه الإرتباط بين التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ و $g(x)$ ، ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$





....

....

....

Key Concept Vertical and Horizontal Translations / تغيير الأبعاد بمقياس (التمدد) أفقياً ورأسياً

Vertical Dilations

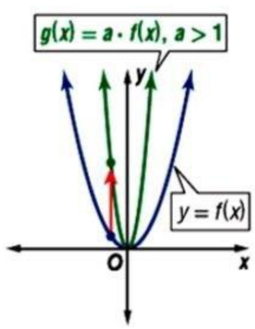
If a is a positive real number, then $g(x) = a.f(x)$, is

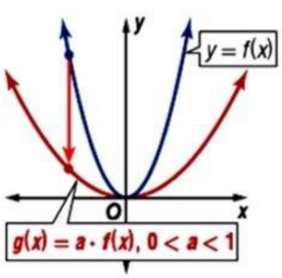
- The graph of f(x) expanded vertically, if $a > 1$.
- The graph of f(x) compressed vertically, if $0 < a < 1$.

التمدد الرأسي

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، إذاً $g(x) = a.f(x)$ هو

- التمثيل البياني لـ f(x) بعد توسعه رأسياً ، إذا كان $a > 1$
- التمثيل البياني لـ f(x) بعد إنكماشه رأسياً ، إذا كان $0 < a < 1$.





Horizontal Dilations

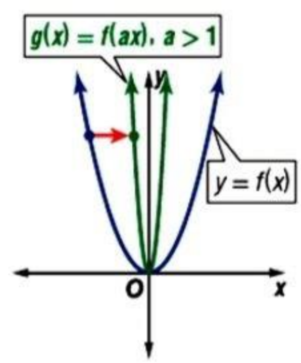
If a is a positive real number, then $g(x) = f(a.x)$, is

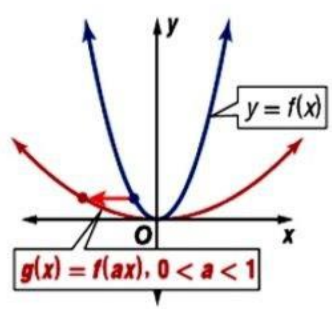
- The graph of f(x)compressed horizontally., if $a > 1$.
- The graph of f(x)expanded horizontally, if $0 < a < 1$.

التمدد الأفقي

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، إذاً $g(x) = f(a.x)$, هو

- التمثيل البياني لـ f(x) بعد انكماشه أفقياً ، إذا كان $a > 1$
- التمثيل البياني لـ f(x) بعد توسعه أفقياً ، إذا كان $0 < a < 1$.

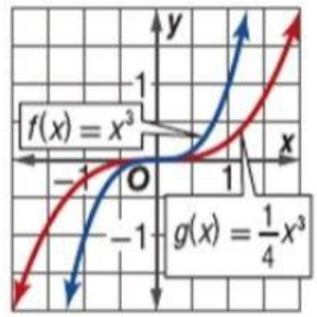




Identify the parent function $f(x)$ of $g(x)$, describe how the graphs of $g(x)$ and $f(x)$ are related. Then graph $f(x)$ and $g(x)$ on the same axes.

حدد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$ وصف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $g(x)$ و $f(x)$ ثم مثل بيانياً $f(x)$ و $g(x)$ علي المحاور ذاتها.

a. $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



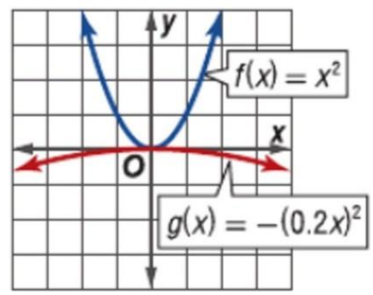
....

....

....

....

b. $g(x) = -(0.2x)^2$



....

....

....

....

Guided Practice تمرين موجه

4A. $g(x) = [\![x]\!] - 4$

4B. $g(x) = \frac{15}{x} + 3$

....

....

....

....

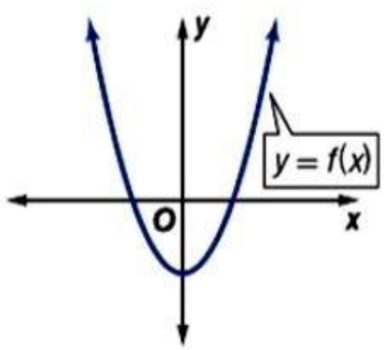
Key concept Transformation with Absolute Value / التحويلات مع القيمة المطلقة

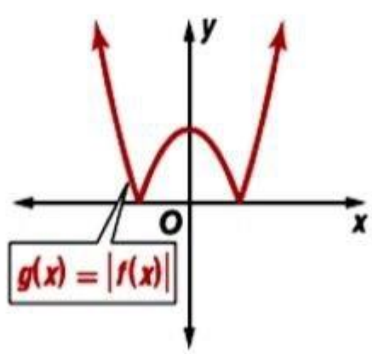
$g(x) = |f(x)|$

this transformation reflects any portion of the graph of f(x) that is below the x-axis so that it is above the x-axis.

$g(x) = |f(x)|$

يعكس هذا التحويل أي جزء من التمثيل البياني لـ f(x) يكون أسفل المحور الأفقي x بحيث يصبح فوق المحور الأفقي x .



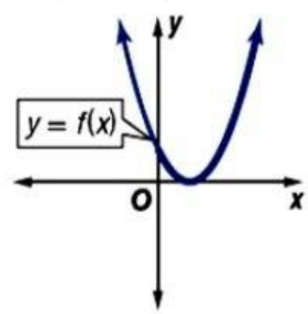


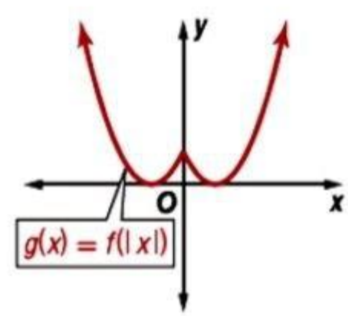
$g(x)= f(|x|)$

this transformation results in the portion of the graph of f(x) that is to the left of the y-axis being replaced by a reflection of the portion to the right of the y-axis.

$g(x)= f(|x|)$

يؤدي هذا التحويل إلي استبدال جزء التمثيل البياني لـ f(x) الذي يقع علي يسار المحور y بانعكاس الجزء الذي يقع علي يمين المحور الرأسي y .

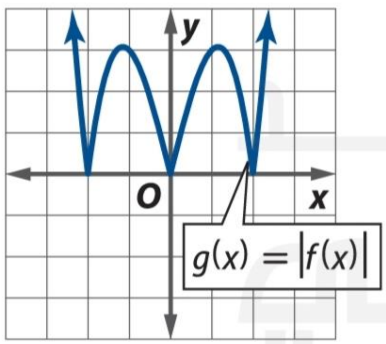




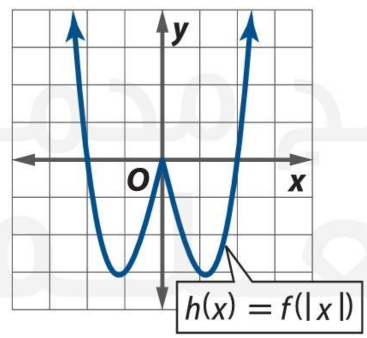
Use the graph of $f(x) = x^3 - 4x$ in figure 1.5.6 to graph each function.

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3 - 4x$ في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل دالة بيانياً.

a. $g(x) = |f(x)|$



b. $h(x) = f(|x|)$



Outcomes نواتج التعلم Function operations and Composition of Functions 1-6
العمليات علي الدوال وتركيب الدوال

1- Perform operations with functions.
2- Find compositions of functions.

1- إجراء العمليات علي الدوال.
2- إيجاد تركيب الدوال.

Key Concept Operations with Functions العمليات علي الدوال

Let f and g be two functions with intersecting domains. Then for all x-values in the intersection, the sum, product, difference, and quotient of f and g are new functions defined as follows.

افترض أن f و g دالتان يتقاطع مجالهما ، إذاَ لجميع قيم x في التقاطع يكون مجموع f و g وناتج ضربهما والفرق بينهما وناتج قسمتهما دوال جديدة معرفة كما يلي

Sum الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	Product ناتج الضرب	$(f . g)(x) = f(x) . g(x)$
Difference الفرق	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	Quotient ناتج القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Find $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x)$ and $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ for each $f(x)$ and $g(x)$. State the domain of each new function.

جد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x)$ و$\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$و $g(x)$. اذكر المجال.

$$f(x) = x^2 - 6x - 8\ , g(x) = \sqrt{x}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

$f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

....
....
....
....
....
....
....
....

Given $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}$. and $h(x) = 3x - 5$, find each function and its domain.

بفرض أن $f(x) = x^2 + 4x$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ و $h(x) = 3x - 5$ جد مجال كل دالة.

a. $(f + g)(x)$

....
....
....
....

b. $(f - h)(x)$

....
....
....
....

c. $(f.h)(x)$

....
....
....
....

d. $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

....
....
....
....

Key Concept composition of functions تركيب الدوال

The composition of function f with function g is defined by

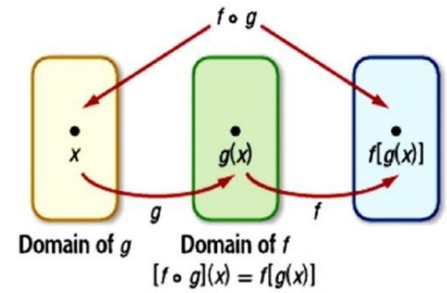
$$[\, f \circ g](x) = f[g(x)]$$

The domain of $f \circ g$ includes all x-values in the domain of g that map to g(x)-values in the domain of g as shown.

يعرف تركيب الدالة f مع الدالة g بالصيغة

$$[\, f \circ g](x) = f[g(x)]$$

يتضمن مجال $f \circ g$ جميع قيم x في مجال g والتي تطابق قيم g(x) في مجال g علي النحو الموضح.



Given $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x - 4$, find each of the following

بفرض أن $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$. جد كلاً مما يلي.

a. $[\, f \circ g\,](2)$

....

....

b. $[\, f \circ g\,](x)$

....

....

c. $[\, g \circ f](x)$

....

....

Guided Practice تمرين موجه

For each pair of functions, find $[\, f \circ g\,](x)$, $[\, g \circ f](x)$, AND $[\, f \circ g](3)$

لكل زوج من الدوال ، جد $[\, f \circ g\,](x)$ و $[\, g \circ f](x)$ و $[\, f \circ g](3)$

$f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

$[\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}](\mathbf{3})$

....

....

....

$[\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}](\boldsymbol{x})$

....

....

....

$[\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}](\boldsymbol{x})$

....

....

....

$f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

$[\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}](\boldsymbol{x})$

....

....

....

$[\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}](\boldsymbol{x})$

....

....

....

$[\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}](\mathbf{3})$

....

....

....

Find a Composition Function with a Restricted Domain إيجاد دالة مركبة مجالها مقيد

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

b. $f(x) = \dfrac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

c. $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$

d. $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$

Find two functions f and g such that $h(x) = [\,f \circ g\,](x)$. Neither function may be the identity function $f(x) = x$.

جد الدالتين f و g بحيث تكون h(x)=[f ° g](x) ، علي ألا تكون إحدي الدالتين هي الدالة المحايدة f(x)=x.

a. $h(x) = x^2 - 2x + 1$

....
....
....

b. $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

....
....
....

c. $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

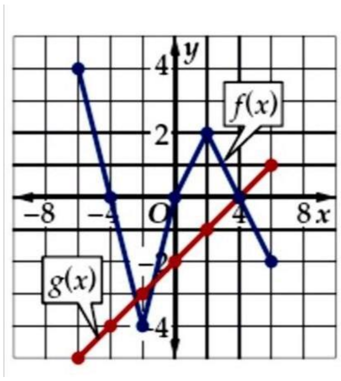
....
....
....

d. $h(x) = \dfrac{1}{x + 7}$

....
....
....

Use the graph of $f(x)$ and $g(x)$ to find each function value.

استخدم التمثيلين البيانين للدالتين f(x) و g(x) لإيجاد قيمة كل دالة.



$(f+g)(2)$

$(f-g)(-6)$

$(f\cdot g)(4)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(-2)$

$(f\circ g)(-4)$

$(g\circ f)(6)$

1- Use the horizontal line test to determine inverse functions.
2- Find inverse functions algebraically and graphically.

1-استخدام اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان لدالة ما دالة عكسية.
2- إيجاد الدوال العكسية جبرياً وبيانياً.

الجدول A Table A

Tickets التذاكر	1	2	3	4	6
Cost ($)التكلفة	2	4	6	8	10

الجدول B Table B

Money spent النقود التي أنفقت($)	2	4	6	8	10
Tickets التذاكر	1	2	3	4	6

1 Inverse Functions The relation shown in Table A is the inverse relation of the relation shown in Table B. Inverse relations exist if and only if one relation contains (b, a) whenever the other relation contains (a, b). When a relation is expressed as an equation, its inverse can be found by interchanging the independent and dependent variables. Consider the following.

1 الدوال العكسية إن العلاقة الموضحة في الجدول A هي العلاقة العكسية للعلاقة الموضحة في الجدول B. وتحدث العلاقات العكسية إذا – فقط إذا – كانت إحدي العلاقتين تشتمل علي (b, a) بينما تشتمل الأخري علي (a, b) ، وعندما يُعبر عن العلاقة في صورة معادلة، يمكن إيجاد علاقتها العكسية من خلال التبادل بين المتغيرات المستقلة ةالمتغيرات التابعة ، تأمل ما يلي

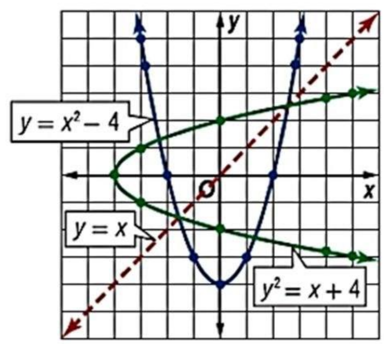
Relation العلاقة

$y = x^2 - 4$

Inverse Relation العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4 \; or \; y^2 = x + 4$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

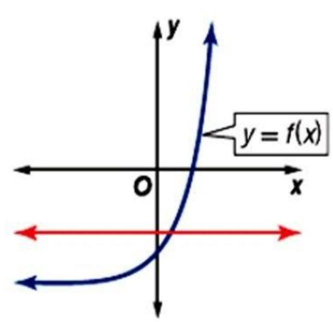
Key Concept Horizontal Line Test اختبار الخط الأفقي

Words الشرح

A function f has an inverse function f^{-1} if and only if each horizontal line intersects the graph of the function in at most one point.

تكون للدالة f الدالة العكسية f^{-1} إذا فقط – إذا تقاطع كل مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة في نقطة واحدة على الأكثر.

Model



Example مثال

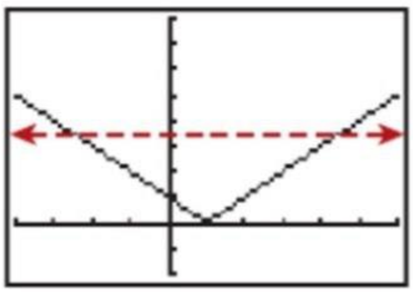
Since no horizontal line intersects the graph of f more than once, the inverse function f^{-1} exists.

بما أنه لا يتقاطع أي مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة f أكثر من مرة ، إذاً توجد الدالة العكسية f^{-1}.

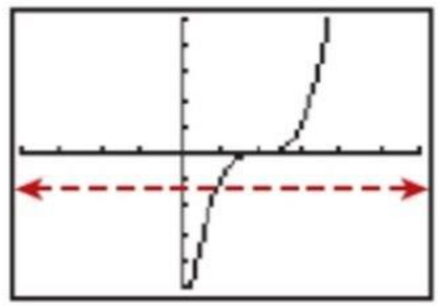
Graph each function using a graphing calculator, and apply the horizontal line test to determine whether its inverse function exists. Write yes or no.

مثّل كل دالة بيانياً بإستخدام حاسبة التمثيل البياني، وطبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة ، اكتب نعم أو لا.

a. $f(x) = |x - 1|$

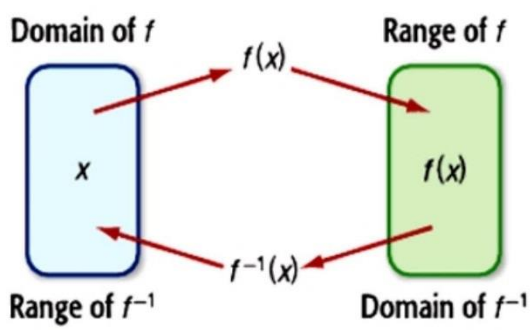


b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



2 Find Inverse Functions If a function passes the horizontal line test, then it is said to be **one-to-one**, because no x-values is matched with more than one y-value and no y-value is matched with more than one x-value.

If a function f is one-to-one, it has an inverse function f^{-1} such that the domain of f is equal to the range of f^{-1}, and the range of f is equal to the domain of f^{-1}.



2 إيجاد الدوال العكسية إذا اجتازت الدالة اختبار الخط المستقيم الأفقي، يُقال إذاً إنها دالة **"واحد لواحد"** ، وذلك لأن قيم x لا تطابق أي منها أكثر من واحدة من قيم y ، وقيم Y لا تطابق أي منها أكثر من واحدة من قيم x .

إذا كانت الدالة fمن دوال "واحد لواحد". يكون لها الدالة العكسية f^{-1} ، حيث يكون مجال f مساوياً لمدي f^{-1} ، ومدي f مساوياً لمجال f^{-1} .

Key concept **Finding an Inverse Function** إيجاد الدالة العكسية

Step 1 الخطوة 1	Determine whether the function has an inverse by checking to see of it is one-to-one using the horizontal line test. حدد ما إذا كان للدالة معكوس من خلال التحقق لمعرفة ما إذا كانت دالة "واحد لواحد" مستخدماً اختبار الخط الأفقي.
Step 2 الخطوة 2	In the equation for f(x), replace f(x) with y and then interchange x and y. في معادلة f(x) ،استبدل f(x) بـ y ، ثم بادل بين x و y .
Step 3 الخطوة 3	Solve for y and then replace y with $f^{-1}(x)$ in the new equation. جد الحل من أجل y ثم استبدل y بـ $f^{-1}(x)$ في المعادلة الجديدة.
Step 4 الخطوة 4	State any restrictions in the domain of f^{-1}. Then show that the domain of f is equal to the range of f^{-1} and the range of f is equal the domain of f^{-1}. حدد أي قيود علي مجال f^{-1} ، ثم بين أن مجال f مساوٍ لمدي f^{-1} ، وأن مدي f مساوٍ لمجال f^{-1} .

Determine whether f has an inverse function. If it does, find the inverse function and state any.

حدد ما إذا كان للدالة f دالة عكسية ، فإن كان لها ، فجد الدالة العكسية واذكر أي قيودٍ علي مجالها.

a. $f(x) = \frac{x+7}{x}$

....

....

....

....

b. $f(x) = \sqrt{x-4}$

....

....

....

....

c. $-16 + x^3$

....
....
....
....

d. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

....
....
....
....

Key concept **composition of Inverse Functions تركيب الدوال العكسية**

Two functions, f and g, are inverse functions if and only if • f[g(x)] = x for every x in the domain of g(x) and • g[f(x)] = x for every x in the domain of f(x).	تكون الدالتان f و gدالتين عكسيتين لبعضهما إذا وفقط إذا كانت • f[g(x)] = x لكل x في مجال g(x) و • g[f(x)] = x لكل x في مجال f(x)

Show that f and g are inverse functions. أثبت أن f و g دالتان متعاكستان.

$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0; \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \sqrt{x - 10}$

....
....
....
....
....

$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

....
....
....
....
....

Show that $f(x) = \frac{6}{x-4}$ and $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ are inverse functions.

أثبت أن $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالتان متعاكستان.

....
....
....
....
....
....