الوحده الخامسه

التكامل

التكامل غير المحدد

① اثبت ان $F(x)=5-\frac{1}{3}x^3$ هي مشتقه عكسيه للداله $f(x)=-x^2$ ثم اكتب مشتقه عكسيه اخرى لها P.14

$$F'(x)=0-\left(\frac{1}{3}\right)3x^2=-x^2=f(x)$$

$\because$ $F'(x)=f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقه عكسيه للداله f

مشتقه عكسيه اخرى

$$F_1(x)=10-\frac{1}{3}x^3$$

P.14

② اثبت أن $F(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقه عكسيه للداله $f(x)=1-\frac{2}{x^3}$

$$F(x)=\frac{x^3+1}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}$$

$$=x+\frac{1}{x^2}=x+x^{-2}$$

$$F'(x)=1-2x^{-3}=1-\frac{2}{x^3}=f(x)$$

$\because$ $F'(x)=f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقه عكسيه للداله f

③ P. 15

ⓐ $\int 15\,dx = 15x + c$

ⓑ $\int 5x^4\,dx = \frac{5}{5}x^5 + c = x^5 + c$

④ P. 16

$$\int (3x^2 - 4x - 1)\,dx = \frac{3}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 - x + c$$

$$= x^3 - 2x^2 - x + c$$

⑤ P. 17

ⓐ $\int (2x-3)(x+4)\,dx = \int 2x^2 + 8x - 3x - 12\,dx$

$$= \int 2x^2 + 5x - 12\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 12x + c$$

ⓑ $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}\,dx = \int \frac{(\cancel{x+1})(x+4)}{(\cancel{x+1})}\,dx$

$$= \int x - 4\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$$

ⓒ $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{(3x^2-x)^2}{x^2}\,dx = \int \frac{9x^4 - 6x^3 + x^2}{x^2}\,dx$

$$= \int \frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\,dx$$

$$= \int (9x^2 - 6x + 1)\,dx$$

$$= \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + x + c$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$$

⑥ P. 17

(a) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

(c) $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int (x^2-3x)\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$= \int x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - 3\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

---

⑦ P.18

$F(x) = \int (2x+5)\,dx$

$F(x) = x^2 + 5x + c$ $\qquad F(-1) = 0$

$F(-1) = 1 - 5 + c = 0$

$c = 4$

$\therefore F(x) = x^2 + 5x + 4$

$S(t)$ t $V(t)$ $a(t)$ 8 P.19

المسافة   الزمن   السرعة   العجلة

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$ «سالب بسبب القذف لأعلى»

$V(t) = \int a(t)\, dt = \int -9.8\, dt$

$= -9.8t + c$

$V(0) = 12 \Rightarrow \quad 12 = 0 + c \Rightarrow c = 12$

$V(t) = -9.8t + 12$

(a) عند أقصى ارتفاع $V(t) = 0 \Leftarrow$

$0 = -9.8t + 12$

$t = \frac{12}{9.8} = 1.22$

(b) $S(t) = \int v(t)\, dt = \int (-9.8t + 12)\, dt$

$= \frac{-9.8}{2} t^2 + 12t + c$ لحظة القذف :

$80 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 80$ لحظة القذف :

$t = 0 \,،\, S = 80$

$\therefore S(t) = -4.9t^2 + 12t + 80$

تصل الكرة الى سطح الأرض عندما $S(t) = 0$

$\therefore 4.9t^2 - 12t - 80 = 0$

$t = -3$ مرفوض   أو $t = 5.45$

$\therefore$ تصل الكرة الى الأرض بعد 5.45 ثانية

التكامل بالتعويض

① P. 21

ⓐ $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)\,dx$

$u = x^3+4x^2+x$

$du = (3x^2+8x+1)\,dx$

$= \int u^7\,du = \frac{1}{8}u^8 + c$

$= \frac{1}{8}(x^3+4x^2+x)^8 + c$

ⓑ $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\,(2x-5)\,dx$

$u = x^2-5x+2$

$du = (2x-5)\,dx$

$= \int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + c$

② P.22

ⓐ $\int \sqrt[5]{3x+7}\,dx =$

$u = 3x+7$

$du = 3\,dx$

$= \int \frac{1}{3}(3x+7)^{\frac{1}{5}}\,3\,dx$

$= \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{5}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{18}u^{\frac{6}{5}} + c$

$= \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + c$

② P. 22

(b) $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$

$= \int (3)\,3(x^{\frac{1}{3}}-5)\,\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$u = x^{\frac{1}{3}} - 5$

$du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$= \int 9\,u\,du$

$= \frac{9}{2}u^2 + c = \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x}-5)^2 + c$

③ P. 23

$\int x(2x-1)^3\,dx =$

$u = 2x-1$

$2x = u+1 \Rightarrow 2dx = du$

$= \frac{1}{4}\int 2x(2x-1)^3\,2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (u+1)\,u^3\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}\right]+c$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2x-1)^5}{5}+\frac{(2x-1)^4}{4}\right]+c$

④ P. 23

$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx =$

$u = 3+x^2$

$du = 2x\,dx$

$x^2 = u-3$

$= \int \frac{1}{2}x^4(3+x^2)^{\frac{1}{2}}\,2x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}(x^2)^2(3+x^2)^{1/2}\,2x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}(u-3)^2(u)^{1/2}\,du$

$= \int \frac{1}{2}(u^2-6u+9)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}})\,du$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 6\times\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 9\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]+c$

$= \frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

تكامل الدوال المثلثية

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

---

① P.25

ⓐ $\int (\cos x + \csc^2 x) \, dx =$

$= \sin x - \cot x + c$

ⓑ $\int \sec x (\tan x + \sec x) \, dx =$

$= \int \sec x \tan x \, dx + \int \sec^2 x \, dx$

$= \sec x + \tan x + c$

ⓒ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx$

$= -\cot x + c$

② P.25

ⓐ $\int \sin(5x)\,dx = \frac{-1}{5}\cos(5x) + C$

ⓑ $\int (x^2 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

ⓒ $\int x\sec^2(x^2+2)\,dx =$ $\quad u = x^2 + 2$

$= \frac{1}{2}\int 2x\sec^2(x^2+2)\,dx$ $\quad du = 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$

$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2+2) + C$

③ P.26

ⓐ $\int \sin^3 x \cos x\,dx$ $\quad u = \sin x$

$= \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C$ $\quad du = \cos x\,dx$

$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

ⓑ $\int \csc^2 x \cot x\,dx = -\int \cot x(-\csc^2 x)\,dx$

$u = \cot x$

$= \int u\,du = -\frac{1}{2}u^2 + C$ $\quad du = -\csc^2 x\,dx$

$= -\frac{1}{2}(\cot x)^2 + C$

ⓐ $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)\,dx$ $\quad$ ④ P.27

$= -\frac{1}{2}\int (\cos^3(2x-3))[-2\sin(2x-3)]\,dx$ $\quad u = \cos(2x-3)$

$du = -\sin(2x-3)\,(2)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int u^3\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + C$

$= -\frac{1}{8}(\cos(2x-3))^4 + C$

(b) $\int x^2 \sin(x^3-1)\,dx$

$u = x^3 - 1$

$du = 3x^2\,dx$

$= \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3-1)\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + c$

$= -\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + c$

(c) $\int (3+\sin 2x)^3 \cos(2x)\,dx$

$u = 3 + \sin 2x$

$du = 2\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (3+\sin 2x)^3 (2\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{8}(3+\sin 2x)^4 + c$

$\int \csc^5 x \cot x\,dx$ P.28

$= -\int \csc^4 x\,(-\csc x \cot x)\,dx$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cdot \cot x\,dx$

$= -\int u^4\,du$

$= -\frac{1}{5}u^5 + c$

$= -\frac{1}{5}\csc^5 x + c$

الدوال الأسيه واللوغاريتميه

الإشتقاق

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad ، \quad \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad ، \quad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad ، \quad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad : \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\int u' e^u dx = e^u + c \quad : \quad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad : \quad \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c \quad : \quad \frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$$

P. 30 ① اوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

ⓐ $f(x) = 10^x$

$f'(x) = (10)^x \ln 10$

ⓑ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \frac{1}{x^2}$

ⓒ $f(x) = 5^{\cos x}$

$f'(x) = 5^{\cos x} \ln 5 \frac{d}{dx} \cos x$

$= -5^{\cos x} \ln 5 \sin x$

P. 31 ② اوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

ⓐ $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ⓑ $f(x) = e^{x^2-4}$

$f'(x) = e^{x^2-4} \frac{d}{dx}(x^2-4)$

$= e^{x^2-4}(2x)$

ⓒ $f(x) = e^{\tan x} \rightarrow f'(x) = e^{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x)$

$= e^{\tan x} \sec^2 x$

P. 32 ③ اوجد مشتقة كل من الدوال التالية

ⓐ $f(x) = \ln(2x + x^3)$

$f'(x) = \frac{1}{2x + x^3} \cdot \frac{d}{dx}(2x + x^3)$

$= \frac{2 + 3x^2}{2x + x^3}$

(b) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{2x+1}$$

$$= (2x+1) \cdot \frac{-2}{(2x+)^2} = \frac{-2}{2x+1}$$

(c) $h(x) = \ln(1+\sqrt{3}\,x)$

$$h'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{3}\,x} \cdot \frac{d}{dx}(1+\sqrt{3}\,x)$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{3}\,x} \cdot (\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}$$

(d) $h(x) = \ln(\sin x)$

$$h'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

④ P.33 أوجد :

(a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx$

$u = 3x$

$du = 3\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

(b) $\int (2x-1)\,e^{x^2-x+3}\,dx$

$u = x^2 - x + 3$

$du = (2x-1)\,dx$

$$= \int e^{u}\,du = e^{u} + c$$

$$= e^{x^2-x+3} + c$$

(a) $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$ أوجد ⑤ P.34

$= \frac{-5}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx$ $u = 3x-2$

$du = 3\,dx$

$= \frac{-5}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{-5}{3}\ln|u| + c$

$= \frac{-5}{3}\ln|3x-2| + c$

(b) $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$ $u = t^3-3t^2+8$

$du = (3t^2-6t)\,dt$

$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$= \ln|t^3-3t^2+8| + c$

(c) $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx = \int \frac{x^3}{x}\,dx + \int \frac{4}{x}\,dx$

$= \int x^2\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 4\ln|x| + c$

$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ أوجد ⑥ P.35

$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ $u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$= \ln|\sin x| + c$

التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

اوجد: ① P.37

$\int x \cos x \, dx$

$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$= x \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \sin x + \cos x + c$

ⓐ $\int (x-3)\, e^{x-3} \, dx$ ② P. 38

$u = x - 3 \qquad dv = e^{x-3} \, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$= (x-3)\, e^{x-3} - \int e^{x-3} \, dx$

$= (x-3)\, e^{x-3} - e^{x-3} + c$

ⓑ $\int 4x\, e^{-5x} \, dx = \frac{-1}{5} \int (4x)(-5)\, e^{-5x} \, dx$

$u = 4x \qquad dv = -5\, e^{-5x} \, dx$

$du = 4\, dx \qquad v = e^{-5x}$

$= \frac{-1}{5} \left[4x\, e^{-5x} - \int 4\, e^{-5x} \, dx \right]$

$= \frac{-1}{5} \left[4x\, e^{-5x} - \int \frac{-1}{5}\, 4\, (-5)\, e^{-5x} \, dx \right]$

$= \frac{-1}{5} \left[4x\, e^{-5x} + \frac{4}{5}\, e^{-5x} \right] + c$

$= \frac{-4}{5}\, x\, e^{-5x} - 4\, e^{-5x} + c$

$\int \ln x \, dx$ ③ P.38

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$

$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c$

$\int (x+1) \ln(x+1) \, dx$ ④ P. 39

$t = x+1$

$= \int t \ln t \, dt$

$dt = dx$

$= \frac{t^2}{2} \cdot \ln t - \int \frac{t^2}{2} \frac{dt}{t}$

$u = \ln t \quad dv = t \, dt$

$du = \frac{dt}{t} \quad v = \frac{t^2}{2}$

$= \frac{t^2}{2} \cdot \ln|t| + \frac{1}{4} t^2 + c$

$= \frac{t^2}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4}(x+1)^2 + c$

$\int x^2 \sin x \, dx$ ⑤ P. 39

$u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = -\cos x$

$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$

$u = 2x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2 \, dx \qquad v = \sin x$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

$$I = \int x^2 e^{x+2} dx$$ ⑥ P. 40

$u = x^2 \quad dv = e^{x+2} dx$

$du = 2x dx \quad v = e^{x+2}$

$$I = x^2 (e^{x+2}) - \int 2x e^{x+2} dx$$

$u = 2x \quad dv = e^{x+2} dx$

$du = 2 dx \quad v = e^{x+2}$

$$I = x^2 e^{x+2} - \left[2x e^{x+2} - \int 2 e^{x+2} dx \right]$$

$$= x^2 e^{x+2} - 2x e^{x+2} + 2 e^{x+2} + c$$

$$I = \int e^x \cos x \, dx$$ ⑦ P. 41

$u = e^x \quad dv = \cos x \, dx$

$du = e^x dx \quad v = \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$u = e^x \quad dv = \sin x \, dx$

$du = e^x dx \quad v = -\cos x$

$$I = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{1}{2} \left[e^x \sin x + e^x \cos x \right] + C$$

التكامل بإستخدام الكسور الجزئية

① P. 43

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$$

ⓐ الكسور الجزئية

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{2x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3}$$

$$= \frac{A_1(x-3) + A_2(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$2x-1 = A_1(x-3) + A_2(x-1)$$

بوضع $x = 3$

$$2(3)-1 = A_1(0) + A_2(3-1)$$

$$5 = 2A_2 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{5}{2}}$$

بوضع $x = 1$

$$2(1)-1 = A_1(1-3) + A_2(0)$$

$$1 = -2A_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x-3)}$$

ⓑ $$\int f(x)\,dx = \int \frac{-1}{2(x-1)}\,dx + \int \frac{5}{2(x-3)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + c$$

② P.44

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

$$= \frac{A_1(2x+1)(x-3) + A_2\,x(x-3) + A_3\,x(2x+1)}{x(2x+1)(x-3)}$$

$$\therefore x^2-2 = A_1(2x+1)(x-3) + A_2(x)(x-3) + A_3(x)(2x+1)$$

بوضع $x=0$

$$-2 = A_1(1)(-3) + A_2(0) + A_3(0)$$

$$-2 = -3A_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{2}{3}}$$

بوضع $x=3$

$$3^2-2 = A_1(7)(0) + A_2(3)(0) + A_3(3)(7)$$

$$7 = A_3(3)(7) \Rightarrow \boxed{A_3 = \frac{1}{3}}$$

بوضع $x=\frac{-1}{2}$

$$\frac{1}{4}-2 = A_1(0)(-\tfrac{1}{2}-3) + A_2(\tfrac{-1}{2})(\tfrac{-1}{2}-3) + A_3(-\tfrac{1}{2})(0)$$

$$\frac{1}{4}-2 = A_2(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{7}{2})$$

$$\frac{-7}{4} = A_2\left(\frac{7}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A_2 = -1}$$

$$I = \int \frac{\frac{2}{3}}{x}\,dx + \int \frac{-1}{2x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + c$$

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$$ ③ P.45

$$\frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{4x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\therefore 4x^2-4x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

بوضع $x=0$

$$1 = A(1) + B(0)(-1) + C(0)$$

$$\boxed{A=1}$$

بوضع $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = A(0) + B(1)(0) + C(1)$$

$$\boxed{1=C}$$

بوضع $x=2$

$$4(2)^2-4(2)+1 = 1(2-1)^2 + B(2)(2-1) + 1(2)$$

$$9 = 1 + 2B + 2$$

$$9-3 = 2B \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$$\therefore I = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$ ④ P. 46

$$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$= \frac{Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2}{x^2(x+4)}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

بوضع $x=0$

$$1 = A(0)(0+4) + B(0+4) + C(0)^2$$

$$1 = 4B \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$$

بوضع $x=-4$

$$(-4)^2+1 = A(-4)(0) + B(0) + C(-4)^2$$

$$17 = C(16) \Rightarrow \boxed{C = \frac{17}{16}}$$

بوضع $x=1$

$$1^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}$$

$$2 = 5A + \frac{5}{4} + \frac{17}{16}$$

$$5A = 2 - \frac{5}{4} - \frac{17}{16} \Rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{16}}$$

$$I = \frac{-1}{16}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int x^{-2}\,dx + \frac{17}{16}\int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{-1}{16}\ln|x| + \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

⑤ P. 47

$$\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^3-2x^2 & x^3-2x^2-4 \\ & -x^3 \pm 2x^2 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$I = \int 1\,dx + \int \frac{-4}{x^3-2x^2}\,dx$$

$$\frac{-4}{x^3-2x^2} = \frac{-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$= \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$-4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

بوضع $x=0$

$$-4 = A(0)(0-2) + B(0-2) + C(0)^2$$

$$-4 = -2B \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

بوضع $x=2$

$$-4 = A(2)(2-2) + B(2-2) + C(2)^2$$

$$-4 = 4C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

بوضع $x=1$

$$-4 = A(1)(1-2) + 2(1-2) + -1(1)^2$$

$$-4 = -A - 2 - 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$I = \int 1\,dx + \int \frac{dx}{x} + \int 2x^{-2}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= x + \ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$$

P. 48

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2-3x+2 & x^3 \qquad\quad -7x+9 \\ & \underline{-x^3 \mp 3x^2 \pm 2x} \\ & \qquad 3x^2-9x+9 \\ & \qquad \underline{-3x^2 \mp 9x \pm 6} \\ & \qquad\qquad\qquad 3 \end{array}$$

$$= \int (x+3)\,dx + \int \frac{3\,dx}{x^2-3x+2}$$

$$\frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\therefore\ 3 = A(x-2)+B(x-1)$$

بوضع $x=1$

$$3 = A(1-2)+B(0) \Rightarrow \boxed{A=-3}$$

بوضع $x=2$

$$3 = A(0)+B(2-1) \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$$I = \int (x+3)\,dx + (-3)\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{2x^4+3x^2-7}{x^3-6x^2+9x}\,dx =$$ ⑦ P.49

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 12 \\ \hline x^3-6x^2+9x & 2x^4 \qquad + 3x^2 \qquad - 7 \\ & \overset{-}{}2x^4 \overset{+}{-} 12x^3 \overset{-}{+} 18x^2 \\ \hline & \qquad 12x^3 - 15x^2 \qquad - 7 \\ & \qquad \overset{-}{}12x^3 \overset{+}{-} 72x^2 \overset{-}{+} 108x \\ \hline & \qquad\qquad 57x^2 - 108x - 7 \end{array}$$

$$= \int (2x+12)\,dx + \int \frac{57x^2-108x-7}{x^3-6x^2+9x}\,dx$$

$$\frac{57x^2-108x-7}{x^3-6x^2+9x} = \frac{57x^2-108x-7}{x(x^2-6x+9)} = \frac{57x^2-108x-7}{x(x-3)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$\therefore 57x^2-108x-7 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

بوضع $x=0$

$$-7 = 9A \Rightarrow A = \frac{-7}{9}$$

بوضع $x=3$

$$513 - 324 - 7 = 3C \Rightarrow C = \frac{182}{3}$$

بوضع $x=1$

$$57 - 108 - 7 = 4\left(\frac{-7}{9}\right) + (-2B) + \frac{182}{3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{520}{9}$$

$$I = \int (2x+12)\,dx + \left(\frac{-7}{9}\right)\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{520}{9}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{182}{3}\int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$= x^2 + 12x - \frac{7}{9}\ln|x| + \frac{520}{9}\ln|x-3| + \frac{182}{3(x-3)} + C$$

التكامل المحدد

① P. 51 اوجد

$$\int_2^7 (x^3-2x^2+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_2^7$$

$$=\frac{(7)^4}{4}-\frac{2}{3}(7)^3+2(7)-\left[\frac{(2)^4}{4}-\frac{2}{3}(2)^3+(2(2)\right]$$

$$=\frac{4595}{12}=382.92$$

② P. 52 اوجد:

ⓐ $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^2 x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cos 2x+\cot x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=\frac{-1}{4}\cos 2\frac{\pi}{2}+\cot\frac{\pi}{2}-\left[\frac{-1}{4}\cos 2.\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{-3}{4}$$

ⓑ $$\int_2^{-3} 5\,dx=\left[5x\right]_2^{-3}=5(-3)-5(2)=-25$$

ⓒ $$\int_3^3 (-2x^3+x^2)\,dx=0$$

ⓓ $$\int_2^4 \frac{dx}{x-1}=\left[\ln|x-1|\right]_2^4$$

$$=\ln(4-1)-\ln(2-1)$$

$$=\ln 3-\ln 1=1.099$$

P. 52 ③ أوجد

ⓐ $\int_{-3}^{4} |2x-4| dx$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$-(2x-4)$, $2x-4$

$-$ 2 $+$

$= -\int_{-3}^{2}(2x-4)dx + \int_{2}^{4}(2x-4)dx$

$= -[x^2-4x]_{-3}^{2} + [x^2-4x]_{2}^{4}$

$= -[2^2-4(2)-((-3)^2-4(-3))] + [4^2-4(4)-2^2-4(2)]$

$= 29$

ⓑ $\int_{1}^{3} |x+2| dx$

$x+2=0$

$x=-2$

$= \int_{1}^{3} x+2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{3}$

$= \frac{3^2}{2}+2(3)-\left[\frac{1^2}{2}+2(1)\right] = 8$

P. 53 ④ دون حساب قيمة التكامل أثبت أن

$\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leq 0$

نفرض $f(x)=x^2+x$

$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ or $x=-1$

$-\infty$ $+$ -1 $-$ 0 $+$ ∞

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-1,0]$

$\therefore \int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leq 0$

⑤ دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : P.54

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)\,dx$$

بفرض

$$f(x)=x^2+1 \quad ، \quad g(x)=x-1$$

$$f(x)-g(x)=x^2+1-(x-1)=x^2+1-x+1$$
$$=x^2-x+2$$

$$x^2-x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-1)^2-4(1)(2)=-7<0$$

∴ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية ⇐

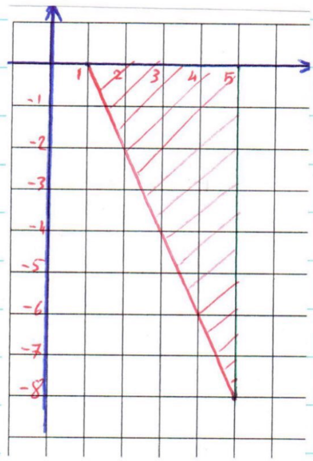
∴ $f(x)-g(x)$ وحيدة الإشارة .

وبأخذ قيمة إفتراضية نجد أن

$$f(x)-g(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in R$$
$$\therefore \quad f(x)-g(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[-1,2]$$
$$\therefore \quad x^2+1-(x-1)\geqslant 0 \quad \forall x\in[-1,2]$$
$$\therefore \quad x^2+1\geqslant x-1 \quad \forall x\in[-1,2]$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)\,dx$$

P.55 ⑥ أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)\,dx$ بيانياً



$f(x) = 2-2x$

x	1	5
$f(x)$	0	-8

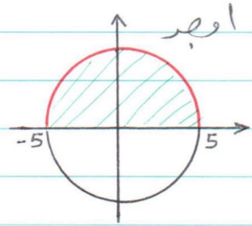
مساحة المثلث : $\frac{1}{2} \times 4 \times 8$

$= 16$ units squared

$$\int_1^5 (2-2x)\,dx = \left[2x - x^2\right]_1^5$$

$$= 2(5) - (5)^2 - (2(1) - 1^2) = -16$$

P.56 ⑦ أوجد



ⓐ $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

$y = \sqrt{25-x^2}$

$y^2 = 25 - x^2$

$x^2 + y^2 = 25$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدة

والدالة $y = \sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

∴ مساحة المنطقة المظللة = $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

$$\therefore \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2} = \frac{1}{2}\pi(5)^2$$

$$= \frac{25\pi}{2}$$

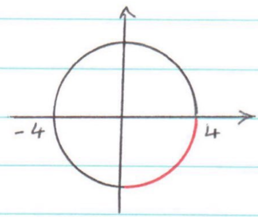
P. 56 (7) أوجد

(b) $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

$y=-\sqrt{16-x^2}$

$y^2=16-x^2$

$x^2+y^2=16$



وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4 وحدات

والدالة $y=-\sqrt{16-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة

$$\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx = \frac{-1}{4}\pi(4)^2 = -4\pi$$

P. 57 (8) (a) حل مثال 8 بطريقة ثانية

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cdot \sec x \tan x\,dx$$

$u=\sec x \qquad du=\sec x \tan x\,dx$

$u=\sec 0=1 \Leftarrow x=0$ عندما

$u=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2} \Leftarrow x=\frac{\pi}{4}$ عندما

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2}-\frac{(1)^2}{2} = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\, 2\cos 2x\,dx$$ أوجد (b)

$=$

$u=\sin 2x \qquad du=2\cos 2x\,dx$

$u=\sin 2(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow x=\frac{\pi}{3}$ عندما

$u=\sin 2(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow x=\frac{\pi}{6}$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u\,du = 0$$

(a) $I = \int_{-1}^{1} \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right) dx$ اوجد (9) P. 58

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2(x+1)\ (x^2+2x+5)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = x^2+2x+5 \quad du = (2x+2)dx$

$u = (-1)^2 + 2(-1) + 5 \Leftarrow x = -1$ عندما

$= 4$

$u = 1^2 + 2(1) + 5 = 8 \Leftarrow x = 1$ عندما

$I = \frac{1}{2}\int_{4}^{8} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$

$= \frac{1}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = 4.876$

(b) $I = \int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\, dx$

$= \int_{2}^{5} (x-1+1)(x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \int_{2}^{5} (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = x-1 \quad du = dx$

$= \int_{1}^{4} u^{\frac{3}{2}} du + \int_{1}^{4} u^{\frac{1}{2}} du$

$u = 2-1 = 1 \Leftarrow x = 2$ عندما

$u = 5-1 = 4 \Leftarrow x = 5$ عندما

$I = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$= \frac{2}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$

$= 17.067$

P. 58 (10)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx$$

$u = x \qquad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = dx \qquad v = \tan x$

$$\int u \, dv = u . v - \int v . du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx = \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

$$= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - 0 - \Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} . \tan \frac{\pi}{4} + \ln|\cos \tfrac{\pi}{4}| - \ln|\cos(0)|$$

$$= \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

7

$$I = \int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$$

اوجد : (11) P. 59

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-x-6 & 3x^2 \quad - \quad -17 \\ & \overset{\ominus}{3x^2} \overset{\oplus}{-} 3x \overset{\oplus}{-} 18 \\ \hline & 3x+1 \end{array}$$

$$\frac{3x^2-17}{x^2-x-6} = 3 + \frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

$$= 3 + \frac{3x+1}{x^2-x-6} = 3 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x+1 = A(x+2) + B(x-3)$$

نضع $x=3$

$$10 = A(5) + B(0) \Rightarrow A = 2$$

نضع $x=-2$

$$-5 = A(0) + B(-5) \Rightarrow B = 1$$

$$\therefore \frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore I = \int_4^7 3\,dx + \int_4^7 \frac{2}{x-3}\,dx + \int_4^7 \frac{dx}{x+2}$$

$$= [3x]_4^7 + 2\left[\ln|x-3|\right]_4^7 + \left[\ln|x+2|\right]_4^7$$

$$= 3(7-4) + 2(\ln 4 - \ln 1) + \ln 9 - \ln 6$$

$$= 12.178$$

الوحدة السادسة

المساحات في المستوى

P.67 ①

$f(x) = x^2 + 4 - 4x \qquad x = -1 \,،\, x = 4$

من الشكل:

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 4]$

$A = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} x^2 + 4 - 4x \; dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_{-1}^{4} = \left[\frac{64}{3} + 16 - 32\right] - \left[\frac{-1}{3} - 4 - 2\right]$

$= \frac{35}{3} = 11{,}6667$ units square

P.67 ②

اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f :

$f(x) = x^2 + 5x + 4$

ومحور السينات

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع لمنحنى f مع محور السينات

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -1$ أو $x = -4$

$+ \qquad - \qquad +$

$-4 \qquad -1$

$\therefore f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-4, -1]$

$\therefore \quad A = -\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{-1}$

$= -\left[\left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{5 \times 16}{2} - 16\right)\right]$

$= -\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}$ units square

P.69 ③

اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى f و
محور السينات والفترة المبينة

ⓐ $f(x) = x^3 - 9x \;,\; [-2, 1]$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$x(x-3)(x+3) = 0$

$x = 0 \;,\; x = 3 \;,\; x = -3$

$0 \in (-2, 1) \;,\; -3 \notin (-2, 1) \;,\; 3 \notin (-2, 1)$

$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$

$= \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 9x)\,dx\right|$

$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$

$= |[0 + 14]| + \left|\left[\frac{-17}{4} - 0\right]\right| = 14 + \frac{17}{4} = \frac{73}{4}$ units square

ⓑ $f(x) = \cos x \;,\; [0, \pi]$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx\right|$

$= \left|\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right|$

$= \left|[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$

$= |(1 - 0)| + |(0 - 1)| = 2$ units square

P.70 ④ اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f :

$f(x) = x^2+3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2+1$ والمستقيمين $x=1$ ، $x=-1$

علماً بأن $f(x) > g(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

$\because f(x) > g(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$\therefore A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$

$= \int_{-1}^{1} x^2+3-x^2-1\, dx = \int_{-1}^{1} 2\, dx =$

$= 2(1-(-1)) = 4$ units square

P.71 ⑤ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2+1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2-3$ والمستقيمين

$x=-1$ ، $x=1$

علماً بأن المنحنيين للدالتين f ، g غير متقاطعين

بما أن المنحنيين غير متقاطعين نأخذ

$x = 0 \in (-1,1) \Rightarrow$

$f(0) = 0+1 = 1$ ، $g(0) = 0-3 = -3$

$\therefore f(x) > g(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$\therefore A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2+1 + x^2+3\, dx$

$= \int_{-1}^{1} 2x^2+4\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{2}{3}+4\right) - \left(\frac{-2}{3}-4\right) = \frac{28}{3}$ units square

P. 72 ⑥ اوجد مساحة المنطقة المحدده بمنحنى الدالتين

$$y_1 = x^2 + 2 \quad ، \quad y_2 = -2x + 5$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 + 2 = -2x + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -3 \quad ، \quad x = 1 \quad \text{«حدود التكامل»}$$

$$x = 0 \in (-3, 1) \Rightarrow y_1 = 0 + 2 = 2 \quad ، \quad y_2 = -2(0) + 5 = 5$$

$$\therefore y_2 \geq y_1 \quad \forall x \in [-3, 1]$$

$$\therefore A = \int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-3}^{1} (-2x + 5 - x^2 - 2)\,dx$$
$$= \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1}$$
$$= \left(3 \times 1 - 1 - \frac{(1)^3}{3}\right) - \left(3 \times -3 - (-3)^2 - \frac{(-3)^3}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ units square}$$

P. 72 ⑦ $f(x) = -2x^2 + 2 \qquad g(x) = x^2 - 1$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -2x^2 + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1 \;،\; x = -1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} -2x^2 + 2 - x^2 + 1\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{1} -3x^2 + 3\,dx\right| = \left|\left[-x^3 + 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[-(1)^3 + 3(1)\right] - \left[-(-1)^3 + 3(-1)\right]\right|$$

$$= 4 \text{ units square}$$

P. 74 ⑧ اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f والدالة g حيث

$$f(x) = 1 - x^3 \qquad g(x) = -4x + 1$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^3 = -4x + 1 \Rightarrow$$

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \ ، \ x = 2 \ ، \ x = -2$$

$$\therefore A = \left| \int_{-2}^{0} f(x) - g(x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x) - g(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{0} (1 - x^3 + 4x - 1)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} 1 - x^3 + 4x - 1\, dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{0}^{2} \right|$$

$$= |0 - (+4)| + |4 - 0| = 8 \text{ units square}$$

P. 75 ⑨ اوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

$f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{x}{2}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 9$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين ، نضع :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \ ، \ x = 4$$

$$A = \left| \int_{0}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx \right| + \left| \int_{4}^{9} \sqrt{x} - \frac{x}{2}\, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_{0}^{4} \right| + \left| \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right]_{4}^{9} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4} \right) - 0 \right| + \left| \left(\frac{2}{3}(27) - \frac{81}{4} \right) - \left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{-43}{12} \right| = \frac{59}{12} = 4.9 \text{ units square}$$

حجوم الأجسام الدورانية

① P.77

اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f :

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1 , 5]$

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 \, dx = \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi \left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = 8\pi \text{ units cube}$$

② P.78

$f(x) = r \quad ; r \neq 0$ في الفترة $[0 , h]$

$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^h r^2 \, dx \quad ; \; r \text{ ثابت}$$

$$= \pi r^2 (h - 0) = \pi r^2 h$$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$ ③ P.79

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad , \quad x = 2$$

نأخذ قيمة اختيارية في الفترة $(-1 , 2)$ ولتكن $x = 0$

$$\Rightarrow f(0) = 1 \quad , \quad g(0) = 2 \Rightarrow g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 , 2]$$

$$V = \int_{-1}^2 \pi \left[(g(x))^2 - (f(x))^2\right] dx = \pi \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4\right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right)\right] dx = \pi \int_{-1}^2 \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3\right] dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^2 = \frac{81}{10}\pi$$

Scanned with CamScanner

$y_1 = x+3$ ، $y_2 = x^2+1$ ④ P.79

$y_1 = y_2 \Rightarrow x+3 = x^2+1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ، $x = 2$

نأخذ $x = 0 \in (-1،2) \Rightarrow y_1 = 3$ ، $y_2 = 1$

$\therefore y_1 \geq y_2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1،2]$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [y_1^2 - y_2^2]\,dx = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [(x^2+6x+9) - (x^4+2x^2+1)]\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{-1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{-(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2) \right) - \left(\frac{-(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1) \right) \right]$$

$= \frac{117}{5} \pi$ units cube

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

① P.81

$f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 1$ ؛ اوجد طول القوس من منحنى الدالة f
في الفترة $[3 ، 8]$

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_3^8 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_3^8 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{(1+x)^3} \right]_3^8$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3} \right] = \frac{38}{3} \text{ units}$$

② P.82

$f(x) = \frac{2}{9} (9 + 3x)^{3/2}$ ؛ اوجد طول القوس من منحنى الدالة f
في الفترة $[2 ، 5]$

$$f(x) = \frac{2}{9} (9 + 3x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} (3)$$

$$= (9 + 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1 + ((9+3x)^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_2^5 \sqrt{1 + 9 + 3x}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{10 + 3x}\, dx = \frac{1}{3} \int_2^5 3 (10 + 3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} (10 + 3x)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{2}{9} \left[25^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{9} [125 - 64] = \frac{122}{9} \text{ units}$$

③ P.83 أوجد معادلة منحنى f الذي ميله عند النقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2,2)$

$\because f'(x) = 3x^2 + x \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 + x \, dx$

$\therefore f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + c$

$= x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $(2,2)$

$2 = 2^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + c$

$2 = 8 + 2 + c \Rightarrow c = -8$

$\therefore$ معادلة المنحنى F المطلوب هي

$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$

④ P. 83 اوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1,-5)$

$\because f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

$\therefore f(x) = \int -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \, dx$

$= \frac{-8x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + c$

$= -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + c$

ولتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $(-1,-5)$

$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + c$

$\therefore c = 3$

$\therefore$ معادلة المنحنى المطلوبة

$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$

P.84 ⑤ إذا كان ميل العمودي للمنحني f عند أي نقطة عليه (x,y)

هو $2x-1$ فأوجد معادلة المنحني علماً بأنه يمر بالنقطة $B(1,0)$

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)} = 2x-1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{2x-1}$

∴ معادله المنحني هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{-1}{2}\ln|2x-1| + c$$

لتعيين قيمة الثابت c

$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|2(1)-1| + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|1| + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x-1|$$

P.85 ⑥ $f''(x) = 5x-2$ أوجد معادلة f إذا كانت $P(2,-2)$ نقطة حرجة

$$f''(x) = 5x-2 \Rightarrow f'(x) = \int 5x-2\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 2x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة إذن

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6 \Rightarrow f(x) = \int \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6\,dx \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة فهي تنتمي الى منحنى f فهي تحقق معادلته أي

$$f(2) = -2 \Rightarrow \frac{5}{6}(2)^3 - (2)^2 - 6(2) + c = -2 \Rightarrow c = \frac{22}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$

المعادلات التفاضلية

خريطة ذهنية

معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى

رتبة أولى

$y' =$

- $= f(x)$ — تكامل مرة واحدة
- $= g(x) \cdot h(x)$ — نفصل المتغيرات
- $= ay$ — الحل: $y = ke^{ax}$
- $= ay + b$ — الحل: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

رتبة ثانية

$y'' = f(x)$ — تكامل مرتين

$ay'' + by' + cy = 0$

المعادلة المميزة

$ar^2 + br + c = 0$

حلين حقيقيين

- $r_1 = r_2$: $y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$
- $r_1 \neq r_2$: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

حلين تخيليين

$r = a \mp i\beta$

$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

المعادلات التفاضلية

① P. 87

اثبت أن الدالة $y = 2e^{3x} + 1$ حل للمعادلة $y' + 3 = 3y$

$$y = 2e^{3x} + 1 \Rightarrow y' = 6e^{3x}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$y' + 3 = 6e^{3x} + 3 = 3(2e^{3x} + 1) = 3y$$

② P. 88 حل المعادلة $y' = 7x^2 + 9x - 1$

$$y = \int y' \, dx = \int 7x^2 + 9x - 1 \, dx$$

صيغة ثابت : $y = \frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - x + c$

③ P. 88 حل المعادلة $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ والتي تجعل $y = 5$ عند $x = 1$

$$y = \int y' \, dx = \int 8x^3 - 3x^2 + 4 \, dx$$

$$= \frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 + 4x + c$$

$$= 2x^4 - x^3 + 4x + c$$

بالتعويض عن قيمتي x, y

$$5 = 2(1)^4 - 1^3 + 4 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore y = 2x^4 - x^3 + 4x$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ حل المعادلة التفاضلية ④ P. 89

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x|^2 + c$$

$$|y| = e^{\ln|x|^2 + c} \Rightarrow |y| = e^{\ln|x|^2} \cdot e^{c}$$

$$\therefore y = \pm e^{c} \cdot e^{\ln|x|^2}$$

$$e^{\ln|x^2|} = |x|^2 = x^2$$

$$y = \pm e^{c} \cdot x^2 \Rightarrow y = K x^2$$

$y' = -2y$ أوجد حلاً للمعادلة ⑤ P. 90
إذا كان $y = 3$ عندما $x = 0$

$$y' = -2y \Rightarrow y = K e^{-2x}$$

بالتعويض عن x، y نجد

$$3 = K e^{-2(0)} \Rightarrow 3 = K \times 1 \Rightarrow K = 3$$

$$\therefore y = 3 e^{-2x}$$

⑥ P. 90

$$3y' - 2y = 4 \Rightarrow 3y' = 2y + 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = K e^{ax} - \frac{b}{a} \quad , \quad \frac{b}{a} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow y = K e^{\frac{2}{3}x} - 2 \xRightarrow{\text{بالتعويض}} 3 = K e^{0} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = K e^{0}$$

$$K = 5$$

$$\therefore y = 5 e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

P. 91 ⑦ حل المعادلة : $y'' = -3x^2 + 6x$

$y' = \int(-3x^2 + 6x)dx$

$y' = -x^3 + 3x^2 + c_1$

$y = \int(-x^3 + 3x^2 + c_1)dx$

$y = -\frac{x^4}{4} + x^3 + c_1x + c_2$

P. 92 ⑧ حل المعادلة : $2y'' - 5y' + 3y = 0$

المعادلة المميزة

$2r^2 - 5r + 3 = 0$

$(2r-3)(r-1) = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$ or $r = 1$

بتطبيق القاعدة VI - (a)

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

P. 92 . ⑨ حل المعادلة $4y'' - 12y' + 9y = 0$

المعادلة المميزة

$(2r - 3)^2 = 0$

$2r - 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$

بتطبيق VI - (b)

$y = (c_1x + c_2)e^{rx}$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$y = (c_1x + c_2)e^{\frac{3}{2}x}$

$y'' + 2y' + 8y = 0$ حل المعادله (15) P. 93

المعادله المميزه

$r^2 + 2r + 8 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 - 32 = -28 = 28i^2$

$\therefore r_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{28}\, i}{2} = \dfrac{-2}{2} - \dfrac{2\sqrt{7}}{2} i = -1 - \sqrt{7}\, i$

$r_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{28}\, i}{2} = \dfrac{-2}{2} + \dfrac{2\sqrt{7}}{2} i = -1 + \sqrt{7}\, i$

$\alpha = -1 \ ، \ \beta = \sqrt{7}$

بتطبيق القاعده (c) - $\underline{VI}$

$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

يكون الحل العام للمعادله التفاضليه هو

$y = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{7} x + c_2 \sin \sqrt{7} x)$

الوحدة السابعة - القطوع المخروطية

القطع المكافئ

① P. 104

ⓐ اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4, 0)$

الرأس نقطة الأصل $(0, 0)$

البؤرة $F(-4, 0)$ تنتمي الى الجزء السالب لمحور السينات

$P = -4$ ∴ معادلة الدليل $x = 4$

∴ معادلة القطع المكافئ على الصورة $y^2 = 4Px$

∴ معادلة القطع المكافئ $y^2 = -16x$

ⓑ اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0, 2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

∵ البؤرة $F(0, 2)$ ∴ $P = 2$

معادلة الدليل $y = -2$

∴ رأس القطع في منتصف المسافة بين F والدليل أي $(0, 0)$

∴ معادلة القطع المكافئ على الصورة $x^2 = 4Py$

∴ معادلة القطع المكافئ هي $x^2 = 8y$

② P.105 اوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ ثم ارسم شكلاً تقريبياً لهذا القطع في كل مما يلي :

ⓐ المعادلة $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ على الشكل $x^2 = 4py$

$\therefore$ محور التماثل هو $y\text{-axis}$ ، $x^2 = 4y$

$\therefore 4p = 4 \Rightarrow p = 1 \quad , \quad p > 0$

$\therefore$ البؤرة $F(0, p) = F(0, 1)$

معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -1$

ⓑ المعادلة $x = -\frac{1}{5}y^2 \Rightarrow y^2 = -5x$

محور التماثل $x\text{-axis}$

$4p = -5 \Rightarrow p = \frac{-5}{4}$

$\therefore$ البؤرة $F(p, 0) = F(\frac{-5}{4}, 0)$

معادلة الدليل

$x = -p \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Scanned with CamScanner

③ P.105 اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل

ويمر بالنقطة $A(1,1)$ ومحور تماثله y-axis

∵ رأس القطع نقطة الأصل ومحور تماثله y-axis

تكون معادلته من الشكل $x^2 = 4py$

∵ النقطة $A(1,1)$ تنتمي للقطع يكون

$(1)^2 = 4p(1) \Rightarrow 1 = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

∴ المعادلة

$x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)y$

$x^2 = y$

وتكون البؤرة $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

معادلة الدليل $y = -\frac{1}{4}$

④ اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0,0) و يمر بالنقطتين $B(1,4)$ ، $A(-1,4)$ P. 106

∵ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $B(1,4)$ ، $A(-1,4)$ ورأسه نقطة الأصل ∴ هو يقع في الربعين الأول والثاني

∴ معادلة على الصورة $x^2 = 4py$

وبالتعويض بإحداثيات A أو B نحصل على

$(1)^2 = 4p(4) \Rightarrow p = \frac{1}{16}$

∴ المعادلة

$x^2 = 4 \times \frac{1}{16} \times x \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$

⑤ اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$ P. 106

∵ معادلة الدليل $y = 1$ « مستقيم أفقي والدليل متعامد مع خط التماثل ∴ خط التماثل هو y-axis

∵ رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

∴ معادلة القطع المكافئ على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل $y = -p$ ،

$y = 1 \Rightarrow p = -1$

∴ معادلة القطع هي $x^2 = 4py$

$x^2 = -4y$

⑥ P.107 تصنع إحدى الشركات الكشافات الأمامية للنوعيات عديدة من السيارات إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$ فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي

إذا نظرنا إلى سطح القطع المكافئ بإعتبار رأسه $(0,0)$ وخط تماثله محور الصادات

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 12y \Rightarrow 4P = 12$$

$$\therefore P = 3$$

∴ البؤرة هي عند النقطة

$$F(0,P) = F(0,3)$$

∴ سيكون موضع المصباح في النقطة $F(0,3)$

---

⑦ P.108 في مثال (7) ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 وحدات عن رأس القطع المكافئ

∵ رأس القطع المكافئ $(0,0)$ ومحور تماثله x-axis

∴ معادلة القطع المكافئ من الشكل $y^2 = 4px$

∵ اللمبة تبعد 4 وحدات عن رأس القطع المكافئ

$$\therefore P = 4$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي

$$y^2 = 4 \times 4x \Rightarrow y^2 = 16x$$

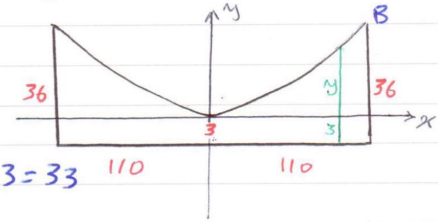
P.108 ⑧ في المثال 8 اذا كان البعد بين العمودين 220m وارتفاع كل عمود 36 m فأوجد

طول الدعامة التي تبعد 10m عن أي من العمودين

باعتبار رأس القطع المكافئ (0،0) معادلة القطع على الصورة

$$x^2 = 4Py$$

إحداثيات النقطة B هي



$x_B = \frac{220}{2} = 110$ ، $y_B = 36 - 3 = 33$

$\therefore B(110 ، 33)$

بالتعويض في معادلة القطع

$$(110)^2 = 4P(33) \Rightarrow P = \frac{(110)^2}{4\times(33)} = \frac{275}{3}$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي

$$x^2 = 4\left(\frac{275}{3}\right)y$$

$$x^2 = \frac{1100}{3}y$$

∴ الإحداثي السيني للدعامة هو

$110 - 10 = 100$

وبالتعويض في معادلة القطع

$$(100)^2 = \frac{1100}{3}y \Rightarrow y = 27.3$$

∴ يبلغ طول الدعامة

$27.3 + 3 = 30.3$

القطع الناقص

① P. 112

إذا كانت معادلة القطع $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ ، $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

∴ الرأسان هما $A_1(0,-3)$ ، $A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر $B_1(-2,0)$ ، $B_2(2,0)$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

∴ البؤرتان $F_1(0,-\sqrt{5})$ ، $F_2(0,\sqrt{5})$

معادلتي الدليلين: $y = \frac{a^2}{c}$ ، $y = -\frac{a^2}{c}$

$y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ ، $y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$

$y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ ، $y = \frac{-9\sqrt{5}}{5}$

طول المحور الأكبر

$2a = 2 \times 3 = 6$

طول المحور الأصغر

$2b = 2 \times 2 = 4$

P. 113 ② أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(2,0)$ ، $F_1(-2,0)$
وطول محوره الأكبر 6 .

∵ البؤرتان تقعان على محور السينات فتكون المعادلة من الشكل

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

البؤرة

$F(2,0) \Rightarrow c = 2$

$6 =$ طول المحور الأكبر $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

∴ طرفا المحور الأكبر $(-3,0)$ ، $(3,0)$

$a^2 = 9$ ، $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow$
$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$

∴ معادلة القطع

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

P. 113 ③ أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الذي معادلته
$x^2 + 4y^2 = 16$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ ، $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = 16 - 4 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

البؤرتان $F_1(-2\sqrt{3},0)$ ، $F_2(2\sqrt{3},0)$

الرأسان $B_1(-4,0)$ ، $B_2(4,0)$

طول المحور الأكبر $2a = 2 \times 4 = 8$

④ اوجد معادلة قطع ناقص طول محوره الأكبر 16cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm ومحوره الأكبر ينطبق على محور السينات P. 114

طول المحور الأكبر = 16 cm ⇐

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

المسافة بين البؤرتين = 10cm ⇐

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 8^2 - 5^2 = 39$$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات إذن معادلته من الشكل

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

حل المثال (5) بطريقة ثانية P.115

البؤرة $F_1(2,0)$ تقع على محور السينات

∴ البؤرة الثانية $F_2(-2,0)$

والقطع يمر بالنقطة $A(2,1)$

$$\therefore AF_1 = \sqrt{(2-2)^2 + (0-1)^2} = 1$$

$$AF_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$2a = AF_1 + AF_2 = 1 + \sqrt{17} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{17}}{2} = 2.56$$

$$\therefore a^2 = 6.56$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 6.56 - 4 = 2.56$$

ومعادلة القطع الناقص هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{6.56} + \frac{y^2}{2.56} = 1$$

⑤ P.115 اوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر افقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$

$\because$ المحور الأصغر افقي طوله 10 cm

$\therefore 2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$\because$ معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$A(2, 2\sqrt{6}) \in$ للقطع

$$\therefore \frac{4}{25} + \frac{24}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{24}{a^2} = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow a^2 = \frac{200}{7}$$

$\therefore$ معادلة القطع هي

$$\frac{x^2}{25} + \frac{7y^2}{200} = 1$$

⑥ P.116 مجسم قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8, 0), A_2(8, 0)$ واحدى طرفي محوره الأصغر $B_1(0, 3.5)$ اوجد احداثيات البؤرتين

من المعلومات المعطاة $a = 8, \quad b = 3.5$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - 3.5^2}$$

$$c \approx 7.194$$

$\therefore$ البؤرتان هما

$$F_1(-7.19, 0), F_2(7.19, 0)$$

⑦ P.116 من المثال (7) طول محوري الصالة 78 m ، 36 m
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص
ليتمكن من سماع الصوت المنطوق بشكل واضح

∵ مصدر الصوت عند احدى البؤرتين ∴ يجب ان يقف الشخص
عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوي للصالة يمثل قطعاً له محور أكبر طوله 78m

$$\therefore 2a = 78 \Rightarrow a = 39$$

$$2b = 36 \Rightarrow b = 18$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = (39)^2 - (18)^2 = 1197$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{1197} = 34.6$$

والمسافة بين البؤرتين

$$2c = 69.2$$

∴ يجب أن يكون موقع الشخص على بعد 69.2m من مصدر الصوت

⑧ P.117

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 76 \times 10^6 \Rightarrow a^2 = 5.7 \times 10^{15}$$

$$b = 74 \times 10^6 \Rightarrow b^2 = 5.4 \times 10^{15}$$

∴ المعادلة

$$\frac{x^2}{5.7 \times 10^{15}} + \frac{y^2}{5.4 \times 10^{15}} = 1$$

القطع الزائد

$9y^2 - 25x^2 = 225$ لتكن معادلة قطع زائد ① P.122

$$\frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

محوره الأساسي الصادات

$\therefore\ a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = 9$

$a = 5 \quad\quad b = 3$

$\therefore$ رأسا القطع الزائد هما: $A_1(0,-5) \ , \ A_2(0,5)$

طرفا المحور المرافق هما: $B_1(-3,0) \ , \ B_2(3,0)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 9 = 34$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{34}$$

$\therefore$ البؤرتان $F_1(0,-\sqrt{34}) \ , \ F_2(0,\sqrt{34})$

معادلتي دليلي القطع الزائد:

$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = \frac{-a^2}{c}$

$y = \frac{25}{\sqrt{34}} \quad\quad y = \frac{-25}{\sqrt{34}}$

طول كل من المحورين:

طول المحور القاطع

$2a = 2 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق

$2b = 2 \times 3 = 6$

معادلة كل من الخطين المقاربين

$y = \frac{a}{b}x \quad , \quad y = -\frac{a}{b}x$

$y = \frac{5}{3}x \quad , \quad y = -\frac{5}{3}x$

1

② P. 122 اوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(4,0)$ ، $F_1(-4,0)$
ورأساه $A_2(2,0)$ ، $A_1(-2,0)$
ثم اوجد معادلة كل من خطي المتقاربين

$\because F(4,0) \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

$\because A(2,0) \Rightarrow a=2 \Rightarrow a^2=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=16-4=12 \Rightarrow b=\sqrt{12}$

∵ البؤرتين على محور السينات ∴ الصورة العامة لمعادلة القطع :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

بالتعويض في هذه المعادلة

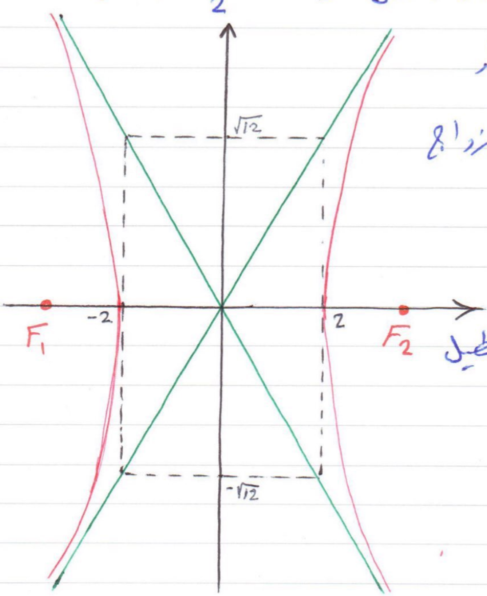
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

∵ معادلتي الخطين المتقاربين :

$$y=\pm\frac{bx}{a}$$

بالتعويض

$$y=\mp\frac{\sqrt{12}\,x}{2} \Rightarrow y=\mp\sqrt{3}\,x$$



لرسم شكلاً تقريبياً للقطع الزائد

① نرسم مستطيل رؤوسه الأزواج المرتبة $(\mp a, \mp b)$ أي $(\mp 2, \mp\sqrt{12})$

② نرسم الخطين المتقاربين المنطبقين على قطري المستطيل

③ ثم نرسم القطع الزائد

اوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه ③ P.123

$F(\sqrt{41}, 0)$ ومعادلة احد خطيه المتقاربين $y = \frac{4}{5}x$

الحل:

$\because F(\sqrt{41}, 0) \Rightarrow c = \sqrt{41} \Rightarrow c^2 = 41$

$\because$ البؤرتين على محور السينات $\therefore$ معادلة القطع على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومعادلة الخطين التقاربين: $y = \mp \frac{b}{a} x$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4a}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 41 = a^2 + \left(\frac{4a}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4 = a^2 + \frac{16}{25}a^2 \Rightarrow \frac{41}{25}a^2 = 41 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow$$

$$a = 5 \Rightarrow b = \frac{4a}{5} \Rightarrow b = \frac{4(5)}{5} \Rightarrow b = 4$$

وتكون معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

④ P.124 اوجد معادلة القطع الزائد الذي رأسه $(0, \frac{5}{4})$
ويمر بالنقطة $(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2})$

$\because$ رأس القطع $(0, \frac{5}{4})$ $\therefore$ رأس القطع على محور الصادات

$$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$$

ومعادلة القطع من الشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ وبالتعويض

$$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$\because (-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}) \in$ للقطع

$$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد $\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$

⑤ P.125

نفرض ان مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل ومحوره القاطع أفقي

$\therefore$ المعادلة على الشكل $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

وكذلك

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = (4498542800)^2 - (35988342)^2 \Rightarrow$$

$$b^2 = 2.024 \times 10^{19} \Rightarrow a^2 = 1.295 \times 10^{15}$$

$\therefore$ يمكن نمذجة مسار السفينة بالمعادلة:

$$\frac{x^2}{1.295 \times 10^{15}} - \frac{y^2}{2.024 \times 10^{19}} = 1$$

4

6 P. 125 اوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري علماً أن

$a = 38942360$ Km , $C = 778547200$ Km

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور القاطع أفقي

∴ المعادلة على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore b^2 = (778547200)^2 - (38942360)^2$$

$$\therefore b^2 = 6.046 \times 10^{17}$$

∴ معادلة القطع الزائد لمسار المركبة حول كوكب المشتري

$$\frac{x^2}{1.517 \times 10^{15}} - \frac{y^2}{6.046 \times 10^{17}} = 1$$

الإختلاف المركزي

① P. 129 حدد نوع القطع في كل مما يلي ، أوجد معادلته :

ⓐ اختلافه المركزي $(e=1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

$e=1$ ← القطع هو قطع مكافئ ، البؤرة $F(-1,0)$ ∴ $P=-1$

ومحور السينات هو محور التماثل

$\therefore y^2 = 4Px \Rightarrow y^2 = 4(-1)x \Rightarrow y^2 = -4x$

ⓑ اختلافه المركزي $(e=\frac{4}{5})$ واحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2},0)$

$e=\frac{4}{5} < 1$ ∴ القطع هو قطع ناقص والبؤرة $F(-4\sqrt{2},0)$

∴ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

$c = 4\sqrt{2} \quad , \quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{a} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 50 - 32 = 18$

∴ المعادلة

$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 0$

ⓒ اختلافه المركزي $(e=\sqrt{3})$ ومعادلة دليله $x = \frac{1}{3}$

$e=\sqrt{3} > 1$ ← القطع هو قطع زائد ، معادلة الدليل $x = \frac{1}{3}$

∴ المحور القاطع "الأساسي" ينطبق على محور السينات ومركزه $(0,0)$

من معادلة الدليل

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{3}c \\ e = \frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \sqrt{3}a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ or } a = 0 \text{ يرفض}$$

$\therefore c = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

1 $\quad \frac{3x^2}{1} - \frac{3y^2}{2} = 1 \Leftarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$ تكون المعادلة

Scanned with CamScanner

P. 131 ② اوجد الإختلاف المركزي لكل قطع مما يأتي حيث معادلته:

ⓐ $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftarrow$ هو قطع ناقص

$a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = 1$

$a = 5 \quad\quad b = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = 25 - 1 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

ديكون الإختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

ⓑ $24y^2 = 600 + 25x^2$

بقسمة الطرفين على 600

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

∴ القطع هو قطع زائد محوره القاطع الصادات

$a^2 = 25 \quad\quad b^2 = 24$

$a = 5 \quad\quad b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow c = 7$

∴ الإختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{7}{5}$

P. 131 ③ اوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $e = 2$ ،
وطول محوره المرافق 6 وحدات

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2a$

$2b = 6 \Rightarrow b = 3 \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + 9$

$\Rightarrow 3a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

طول المحور القاطع

$2a = 2\sqrt{3}$

إذا كان القمر الإصطناعي له مدار بيضاوي «قطع ناقص» ④ P. 133
حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ وطول نصف
محوره الأكبر 8600 Km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض
a) اوجد معادلة مدار القمر الإصطناعي
b) على إفتراض ان طول نصف قطر الأرض 6372 Km
فأوجد أطول و أقصر بُعد للقمر الصناعي عن سطح الأرض

a) $e = 0.05$ ، $a = 8600$ $\quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow$

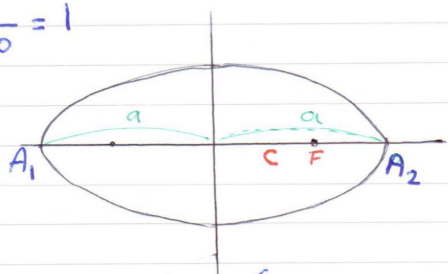
$$0.05 = \frac{c}{8600} \Rightarrow c = 0.05 \times 8600 = 430$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow (430)^2 = (8600)^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$b^2 = 73775100$$

وتكون معادلة المدار

$$\frac{x^2}{73960000} + \frac{y^2}{73775100} = 1$$



b) 6372 طول نصف قطر الأرض

$$A_2F = a - c = 8600 - 430 = 8170$$

فيكون أقصر بُعد : $8170 - 6372 = 1798$

$$A_1F = a + c = 8600 + 430 = 9030$$

فيكون أطول بُعد :

$$9030 - 6372 = 2658$$

الوحده الثامنه

المتغيرات العشوائيه المتقطعه

P.143 ① في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين اوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائيه التاليه وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائيه متقطعه ام لا

ⓐ المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

ⓐ

عناصر S	عدد عناصر X
(H,H)	0
(H,T)	1
(T,H)	1
(T,T)	2

مدى المتغير العشوائي :

$X(S) = \{0, 1, 2\}$

نوع المتغير العشوائي X : متقطع

ⓑ

عناصر S	عناصر المتغير Y
(H, H)	0
(H, T)	1
(T, H)	1
(T, T)	8

مدى المتغير العشوائي :

$Y(S) = \{0, 1, 8\}$

نوع المتغير العشوائي Y : متقطع

ⓒ

عناصر S	عناصر المتغير Z
(H, H)	−2
(H, T)	−1
(T, H)	−1
(T, T)	0

مدى المتغير العشوائي Z

$Z(S) = \{-2, -1, 0\}$

نوع المتغير العشوائي Z متقطع

---

② P.144

فضاء العينه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

عدد عناصر فضاء العينه $= n(S) = 6$

مدى المتغير العشوائي $X = \{0, -1, 3, 8\}$

عناصر X	عناصر مدى X
1	$(1)^2 - 1 = 0$
2	$(2)^2 - 1 = 3$
3	$(3)^2 - 1 = 8$
4	−1
5	−1
6	−1

$f(-1) = P(X=-1)\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{6}$

$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{6}$ ، $f(8) = P(X=8) = \frac{1}{6}$

ⓓ دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير X هي

X	−1	0	3	8
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

③ P. 146

ⓐ $S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (T,T,T)\}$

عناصر S	عدد الصور
(H,H,H)	3
(H,H,T)	2
(H,T,H)	2
(T,H,H)	2
(T,T,H)	1
(T,H,T)	1
(H,T,T)	1
(T,T,T)	0

مدى المتغير العشوائي :

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x

④ P. 147

X	0	1	2	3	4
f(X)	0.35	0.15	0.1	0.2	K

∵ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

$\therefore f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$

$0.35 + 0.15 + 0.1 + 0.2 + K = 1 \Rightarrow$

$K = 1 - 0.8 \Rightarrow K = 0.2$

⑤ P. 148 اذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه هو
$\{0,1,2,3\}$ وكان $f(0)=0.1$ ، $f(1)=0.6$
$f(2)=0.15$ أوجد $f(3)$ ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1$$

$$0.1+0.6+0.15+f(3)=1$$

$$f(3)=1-0.85=0.15$$

∴ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

X	0	1	2	3
f(X)	0.1	0.6	0.15	0.15

⑥ P.149

ⓐ عدد عناصر فضاء العينة S :

$n(S)=10C3=120$

ⓑ عدد الكرات البيضاء التي يمكن سحبها كالتالي

ان تكون كل الكرات المسحوبة حمراء ∴ عدد الكرات البيضاء: $X=0$

ان تكون الكرات المسحوبة منها 2 حمراء وواحدة بيضاء $X=1$

ان تكون الكرات المسحوبة منها 1 حمراء و 2 بيضاء $X=2$

ان تكون الكرات المسحوبة كلها بيضاء $X=3$

∴ مدى المتغير العشوائي X هو $\{0,1,2,3\}$

ⓒ

$P(X=0)=\frac{3C3\times 7C0}{10C3}=\frac{1}{120}$ ، $P(X=1)=\frac{3C2\times 7C1}{10C3}=\frac{21}{120}$

$P(X=2)=\frac{3C1\times 7C2}{10C3}=\frac{63}{120}$ ، $P(X=3)=\frac{3C0\times 7C3}{10C3}=\frac{35}{120}$

ⓓ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

X	0	1	2	3	المجموع
f(x)	1/120	21/120	63/120	35/120	1

إذا كانت دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X هي: ⑦ P.150

فأوجد التوقع μ للمتغير X

X	0	1	2
f(x)	4/9	4/9	1/9

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

$$= 0 \times 4/9 + 1 \times 4/9 + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

⑧ P.151

X	1	2	3	4	5
f(x)	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

ⓐ $\mu = \sum x_i f(x_i)$

$$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.3$$
$$= 3.2$$

ⓑ $\sigma^2 = \sum (x_i^2 f(x_i)) - \mu^2$

$$= 1 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.1 + 25 \times 0.3 - (3.2)^2$$
$$= 12.4 - 10.24 = 2.16$$

ⓒ $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.16} = 1.4697$

⑨ P.153 الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

X	1	2	3	4	5
f(x)	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

اذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X
فاوجد: F(5) ، F(4) ، F(3.5) ، F(1) ، F(0)

$F(0) = P(X \leq 0) = 0$

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X < 1) + P(X = 1)$
$= 0 + 0.43 = 0.43$

$F(3.5) = P(X \leq 3.5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(3.5)$
$= 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0 = 0.89$

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X < 4) + P(X = 4)$
$= P(X=1) + P(2) + P(3) + P(4)$
$= 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0.09 = 0.98$

$F(5) = P(X \leq 5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$
$= 1$

$F(8) = P(X \leq 8) = 1$

⑩ P.155 يبين الجدول التالي بعض قيم داله التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

اوجد:

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

ⓐ $P(2 < x < 4) = F(4) - F(2)$
$= 1 - 0.40 = 0.6$

ⓑ $P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3)$
$= 1 - F(3) = 1 - 0.65 = 0.35$

(11) P. 158 اذا كان X متغيراً عشوائياً ذو حدين ومعلمتيه هما
$n = 6$ ، $P = 0.6$ فأوجد

(a) $P(X=1) = f(1) = 6C1 \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^5$
$= 0.037$

حل آخر:

$P(X=1) = f(1)$
$\because n = 6 , P = 0.6 , X = 1$
نبحث في جدول الإحتمالات في توزيع ذات الحدين ص 172 عن قيمة $f(1)$ (الأنه دالة توزيع احتمالي متقطع) فنجد ان

$f(1) = 0.037$

(b) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$
$= f(3) + f(4)$
$f(3) = 6C3 \times (0.6)^3 \times (0.4)^3 \Rightarrow f(3) = 0.276$
$f(4) = 6C4 \times (0.6)^4 \times (0.4)^2 \Rightarrow f(4) = 0.311$

$P(2 < X \leq 4) = 0.276 + 0.311 = 0.587$

حل آخر:

$P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$
$= f(3) + f(4)$
$= 0.276 + 0.311$ «من نفس الجدول»
$= 0.587$

---

(12) P. 158

$n = 350$ ، $P = 0.02$

$\mu = nP = 350(0.02) = 7$

$\sigma^2 = nP(1-P) = 350(0.02)(0.98) = 6.86$

$\sigma = \sqrt{6.86}$

$= 2.6192$

$n=8$ X: ظهور الصورة ⑬ P.159

$P=\frac{1}{2}$ ، $1-P=\frac{1}{2}$ P هو احتمال ظهور كتابة

التوقع

$\mu = nP = 8\times\frac{1}{2} = 4$

التباين

$\sigma^2 = nP(1-P) = 8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 2$

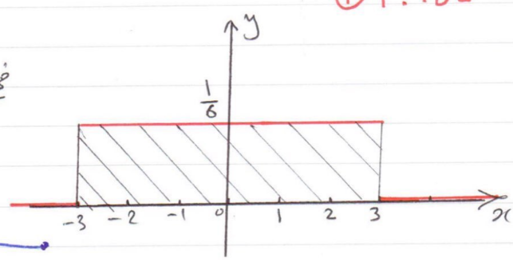
الإنحراف المعياري

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2} = 1.4142$

المتغيرات العشوائية المتصلة "المستمرة"

① P.162

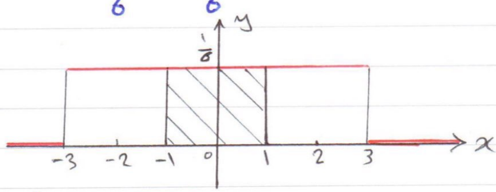
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$



ⓐ $P(X<2)$

= مساحة المنطقة المظللة

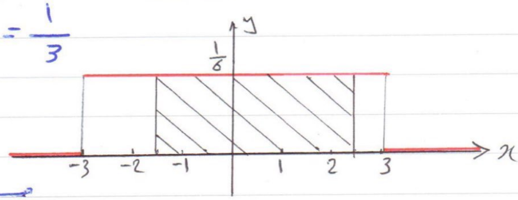
$= (2-(-3))\times\frac{1}{6} = 5\times\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$



ⓑ $P(-1<X<1)$

= مساحة المنطقة المظللة

$= (1-(-1))\times\frac{1}{6} = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$



ⓒ $P(-1.5<X<2.5)$

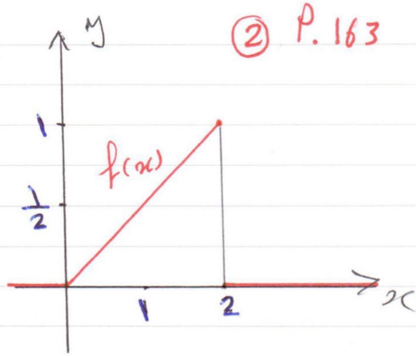
= مساحة المنطقة المظللة

$= (2.5-(-1.5))\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ⓓ $P(X=0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

② P.163



$P(x<1) =$

= مساحة المنطقة المظللة

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X \geq 1)$

= مساحة المنطقة المظللة

$= 1 - P(X<1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(X=1) = 0$

③ P.164 لتكن f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ⓐ أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال

مساحة المنطقة تحت المنحنى من الشكل :

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض $= \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$

∴ f هي دالة كثافة احتمال

ⓑ لإثبات أن f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون على الصورة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\therefore a = 1 \; , \; b = 3 \Rightarrow$

$b - a = 3 - 1 = 2$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أي أن f هي دالة تتبع التوزيع الطبيعي الاحتمالي المنتظم

ⓒ $P(2 \leq X \leq 3) =$

$=$ مساحة المنطقة المظللة

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ⓓ التوقع $= \mu = \frac{a+b}{2}$

$= \frac{1+3}{2} = 2$

التباين $= \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$

P.166 ④ إذا كان Z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

ⓐ $P(Z \leq 0.95)$

نستخدم جدول التوزيع المعياري Z رقم (4) صفحة 177

$P(Z \leq 0.95) = 0.82894$

ⓑ $P(Z > 0.71) = 1 - P(Z < 0.71)$

$= 1 - 0.76115$

$= 0.23885$

ⓒ $P(1.45 \leq Z \leq 3.26) = P(Z \leq 3.26) - P(Z \leq 1.45)$

$= 0.99944 - 0.92647$

$= 0.07297$

⑤ P. 167 إذا كان Z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

ⓐ $P(Z \leq -0.12) = 0.45224$

نستخدم جدول التوزيع المعياري رقم (5) لأن $-0.12 < 0$ صفحة 178

ⓑ $P(-3.2 \leq Z \leq -0.1) =$

$= P(Z \leq -0.1) - P(Z \leq -3.2)$

$= 0.46017 - 0.00069$

$= 0.45948$

ⓒ $P(-5.26 \leq Z \leq 0.69) =$

$= P(Z \leq 0.69) - P(Z \leq -5.26)$

لاحظ أن $0.69 \geq 0$ لذلك نستخدم جدول (4)

وأن $-5.26 \leq 0$ لذلك نستخدم جدول (5)

$= 0.75490 - 0$

$= 0.75490$